三角関数とフーリエ級数展開
—すべての関数は三角関数で表される？—

§1. 万物の基は？

古来からの科学の基本原理と思われる

(1.1) 「複雑なものも単純なものの組み合わせで表される」

は自然な発想なのでしょう．人類最初の数学者と言われるタレス (BC624 頃- BC546 頃) は

「万物の根元は水である」

と言い，“サモスの賢人” ピタゴラス (BC582-BC496) は

「万物は数なり」

と言いました．ソクラテス (BC469-BC399) の弟子でありアリストテレス (BC384-BC322) の師であるプラトン (BC427-BC347) は

「万物は火，土，空気，水，宇宙からなり」

それぞれを，5 種類の正多面体，正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 20 面体，正 12 面体に対応させたそうです．これらにはちょっと首を傾げますが，実際に，近代科学の発展は

「 化合物 ＞ 分子 ＞ 原子 ＞ 電子・陽子・中性子 ＞ 素粒子 ＞？$\cdots$ 」

と進んでいます．さて，本文では次の記号を用います．

$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ (自然数の全体)
$\mathbf{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ (整数の全体)
$\mathbf{Q} := \{n/m;\ n \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{N}\}$ (有理数の全体)
$\mathbf{R} := (-\infty, \infty)$ (実数の全体)
$\mathbf{C} := \{a + bi; a, b \in \mathbf{R}\}$ (複素数の全体)

§2. 関数の基は？

数学における複雑なものとして関数を考えます．一般の関数は複雑です．これを単純なもので表せないか？テーラー (1685-1731) の級数展開は一つの解答です．関数 f は単純なベキ関数 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ の無限和で表されます：

(2.1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

テーラー級数展開は有用です．例えば，指数関数 e^x については

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.2}$$

が成り立ちます．これを利用して次の微分方程式を解いてみましょう．

例題 1. $f(x) - f'(x) = -x,\ f(0) = 0$ をみたす関数 f を求めよ．

[**解答**] f が (2.1) の形で表せたとします．このとき

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \tag{2.3}$$

ですから，$-x = f(x) - f'(x)$ より

$$-x = a_0 - a_1 + (a_1 - 2a_2)x + \cdots + (a_{n-1} - na_n)x^{n-1} + \cdots$$

の両辺の係数を比較して

$$a_0 - a_1 = 0,\quad a_1 - 2a_2 = -1,\quad a_{n-1} - na_n = 0\ (n \geq 3) \tag{2.4}$$

を得ます．これより $a_1 = 0,\quad a_n = 1/n!\ (n \geq 2)$ となるので，(2.2) に注意すれば

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x = e^x - 1 - x$$

が求める解です[1]．

このように，テーラー級数展開は極めて有効なのですが，問題点は f が原点で無限回微分可能でないと使えないことです[2]．実際，(2.1) は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{2.5}$$

となり，係数 a_n は f の原点での微分係数によって決まるのです．

§3. フーリエの主張

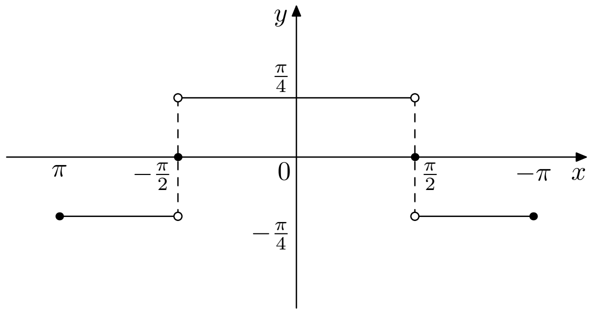
ようやく主役の登場です．フーリエ (1768-1830) は不連続な関数

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (x = \pm\frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\pi}{4} & (-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi) \end{cases} \tag{3.1}$$

---

[1]注意深い読者はこの解答では不満であろう．まず，求める解 f は無限回微分可能であるのか？さらに，(2.1) の形に書けるのか？書けたとして (2.3) の計算 (項別微分) は成り立つのか？ (2.4) は成り立つのか？これらの疑問は 6 節で議論します．

[2]無限回微分可能でもテーラー級数で表されない関数があります．6 節の脚注 13 を参照のこと．



までもが

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \cdots \tag{3.2}$$

と表されることを知って

(3.3) 「すべての関数は三角関数で表される」

という大胆な考えに到ります．これには (1.1) も影響を与えたかもしれません．

フーリエの主張： f が $[-\pi, \pi]$ 上の関数のとき，$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \tag{3.4}$$

とすると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.5}$$

が成り立つ．

a_n, b_n は**フーリエ係数**と呼ばれ，(3.5) を f の **フーリエ級数展開**と言います．フーリエの功績は f が三角関数の和で表されると言う主張だけでなく，(3.5) の係数が (3.4) で定まることを指摘したことです[3]．確かに，f が微分できなくても，積分ができれば (3.4) は計算でき，それによって (3.5) が "いつも成り立つ" と言うわけです[4]．

この大胆な主張は当時の数学会の重鎮であるラグランジュ(1736-1813) やラプラス (1749-1827) から非難を受けることになります．例えば $[-\pi, \pi]$ 上で，$f(x) \equiv 1$ と $g(x) = 1\ (x \neq 0), g(0) = 0$ の 2 つの関数を考えます．f と g について (3.4) を計算すると，両者とも $a_0 = 2$ でその他のフーリエ係数は全て 0 になります．(3.5) が成り立つとすれば，任意の $x \in [-\pi, \pi]$ について $f(x) = g(x) = 1$ となり，$g(0) = 0$ に反します．これは卑近な例ですが，当時は，関数の定義もはっきりしない時代でした．フーリエの頭

[3]テーラー級数展開の (2.5) に相当します．

[4]フーリエ級数展開が難しいのは一般には右辺の和が無限であることです．有限ですめば話は簡単になります．5 節の例は有限和です．

には "g は関数ではなかった" のかもしれません[5]. 後に，連続関数でも (3.5) が成り立たない例が見つかりますが，(3.5) の等式の意味をうまく解釈するとフーリエの主張は間違いとは言えないのです．これについては 8 節で詳しく説明しますが，(3.5) の等式の意味を明確にするために，ε-δ 論法，一様収束，積分可能性などの概念が自然と必要になり，最終的にはルベーグ (1875-1941) の積分論の完成まで待つことになるのです[6].

ところで，フーリエは (3.4) を得るために大変な苦労をしたようです．現在の解析からは (3.4) は (3.5) から (容易に？) 導くことができます．まず $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \ dx = \begin{cases} \pi & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \ dx = 0$$

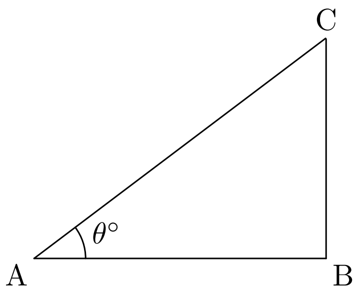
を注意します．このとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \ dx \ &= \ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \cos nx \ dx \\ &= \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \ dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \ dx + \frac{b_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \ dx \right\} \\ &= a_n \end{aligned}$$

となります．b_n についても同様です．もっとも，この計算では 2 つ目の等号で項別積分 (積分と無限和の順序交換) を行っています．その可否は議論が必要です．

§4. 三角比と三角関数

話が随分と難しくなっています．三角比と三角関数の基礎を定義に戻って復習することにしましょう．直角三角形 ABC に対して，$\angle \mathrm{A} = \theta^\circ$ とします．



[5]現代流の関数の定義を 7 節で与えます．

[6]有理数で 1，無理数で 0 となる "関数" $f(x)$ はディィリクレ (1805-1859) の関数と呼ばれます:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [-\pi, \pi] \cap \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \in [-\pi, \pi] \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}$$

この関数は (3.4) の積分が不可能 (リーマン (1826-1866) 積分の意味では) で，(3.5) の右辺は意味がなくなります．ただし，ルベーグ積分の意味では積分可能で $a_n = b_n = 0$ となります．

このとき，BC/AC の値を $\angle$A の**正弦** (またはサイン) と言い，AB/AC の値を $\angle$A の**余弦** (またはコサイン) と言い，それぞれ $\sin\theta^\circ$ と $\cos\theta^\circ$ と書きます：

$$\sin\theta^\circ := \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}, \quad \cos\theta^\circ := \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}. \tag{4.1}$$

正弦と余弦および**正接** (タンジェント)

$$\tan\theta^\circ := \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$$

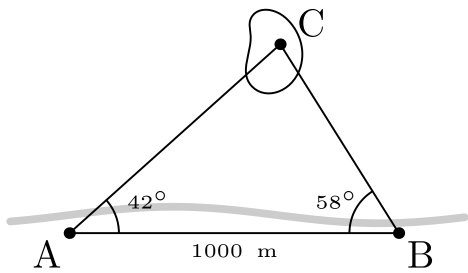
をまとめて**三角比**と言います．

三角比の表を使えば，$\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{BC}=3$, $\mathrm{AC}=5$ の直角三角形において $\angle\mathrm{A} \fallingdotseq 37^\circ$ であり，$\sin 1^\circ \fallingdotseq 0.0175$ などがわかります．また，三平方の定理 $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2$ から

$$\sin^2\theta^\circ + \cos^2\theta^\circ = 1 \tag{4.2}$$

が成り立ちます[7]．三角比の研究は三角法と呼ばれ，三角法を使った三角測量は実用的な分野で古くから使われています[8]．

例題 2. 陸上の 2 地点 A, B と海上の小島の C 地点についての測量から次がわかりました．$\mathrm{AB}=1000\mathrm{m}$，$\angle\mathrm{A}=42^\circ$, $\angle\mathrm{B}=58^\circ$ です．AC と BC の距離を求めよ．



[解答] $\angle\mathrm{C}=80^\circ$ です．三角比の表から $\sin 42^\circ \fallingdotseq 0.6691$, $\sin 58^\circ \fallingdotseq 0.8480$, $\sin 80^\circ \fallingdotseq 0.9848$ なので，正弦定理から

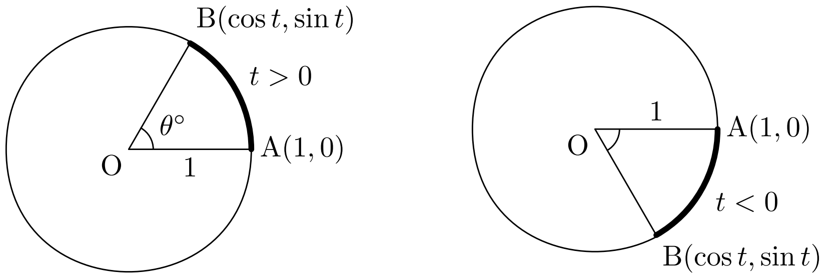
$$\frac{1000}{0.9848} \fallingdotseq \frac{\mathrm{AC}}{0.8480} \fallingdotseq \frac{\mathrm{BC}}{0.6691}$$

が成り立つ．これより，$\mathrm{AC} \fallingdotseq 861\mathrm{m}$, $\mathrm{BC} \fallingdotseq 679\mathrm{m}$ となります．

微分積分で三角関数を考える場合は角度を**度数**表示 (θ°) でなく**弧度法** (t **ラジアン**) 表示を使います．弧度法は O を中心とする半径 1 の円周上の 2 点，A, B に対する中心角 $\angle$BOA の大きさを弧 AB の長さ t で表すのです (次ページ左図)．

[7]三角関数では習慣的に $(\sin\theta^\circ)^2$ を $\sin^2\theta^\circ$ と書きます．$\cos^2\theta^\circ$ も同様です．

[8]三角測量は三角形の基本性質を使って辺の長さを求める方法です．1 節に登場したタレスはピラミッドの影の長さを測って，ピラミッドの高さを求めたと言われています．また，伊能忠敬 (1745-1818) も地図作成に三角比を用いていました．天文学や航海術では球面三角法が使われます．



Bの座標を t を使って表すと $\mathrm{B} = (\cos t, \sin t)$ となります．θ と t の関係は

$$\frac{\theta}{180} = \frac{t}{\pi} \tag{4.3}$$

です．例えば

$$90° = \frac{\pi}{2}\text{ラジアン},\quad 1° = \frac{\pi}{180}\text{ラジアン},\quad 1\,\text{ラジアン} = \frac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57.3°$$

などが成り立ちます．弧度法では通常は単位のラジアンを省略します．t は反時計回りが正で，時計回りは負になります (上右図).

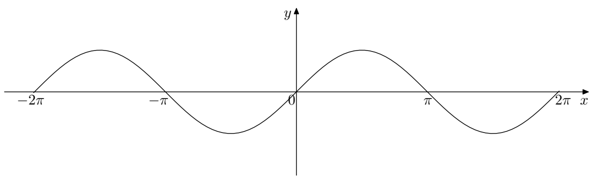
変数 t を x に変えて書くことにします．$-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ であり，x と $x + 2\pi$ は円周上で同じ位置になるので, $\sin x$ も $\cos x$ も**周期** 2π **の周期関数**になります．すなわち，

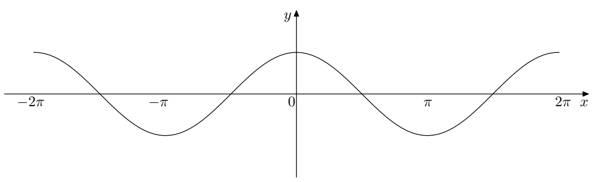
$$\sin x = \sin(x + 2\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2\pi) \tag{4.4}$$

です．また，$\sin x$ は**奇関数**，$\cos x$ は**偶関数**です[9]．さらに

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x \tag{4.5}$$

にも注意しておきます．$y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフは





[9] $f(-x) = -f(x)$ のとき f を奇関数と言い，$f(-x) = f(x)$ をみたすとき f は偶関数と言う．

となります．三角関数の歴史は古く，様々なことが知られています．まず，(4.2) から $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ です[10]．さらに，加法定理と呼ばれる

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{cases} \tag{4.6}$$

が成り立ち，これから $\sin x$ と $\cos x$ の微分が

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \tag{4.7}$$

となることが導かれます．有名なオイラー (1707-1783) の公式は

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{4.8}$$

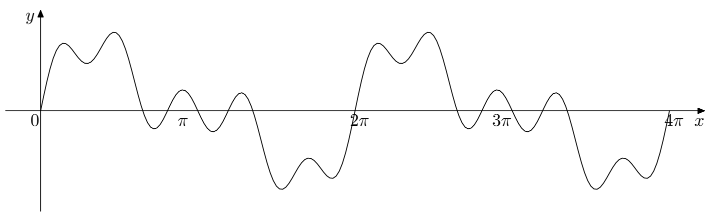
で，指数関数と三角関数が結び付きます．ここで $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位です．$e = 2.718281828459\cdots$ は自然対数の底で

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{4.9}$$

が成り立ちます．

§5. 音と三角関数

音は振動が空気の疎密を生じて伝わります．空気の疎密は空気圧の変化をもたらします．これは音圧と呼ばれ，音圧の時間変化をグラフにすることにより音を波形として表すことができます．次のような，規則的な振動による音は**楽音**と言われます[11]．グラフは周期的になります．周期は 2π で考えます．

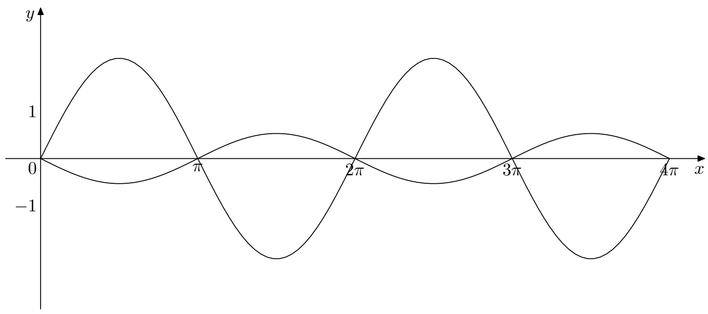


音の三要素は，**大きさ**，**高さ**，**音色**です．基本となる音 (**基音**) を $y = \sin x$ として，音の大きさと，音の高さがどのように表現されるかを見てみましょう． 次は $y =$

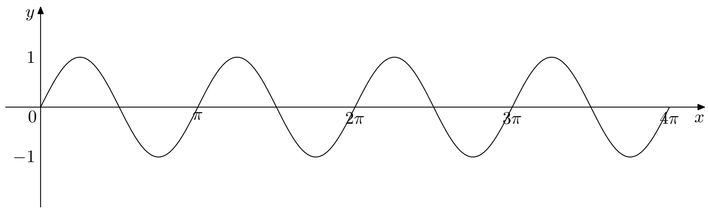
[10]三角比からの延長で “三角関数” と呼ばれますが，この等式は $x = \cos t$, $y = \sin t$ が円の媒介変数表示を与えています．三角関数は円との相性がよく，この意味で，三角関数のことを “円関数” と呼ぶこともあります．

[11]広辞苑では “楽音” とは「発音体が規則正しい振動をある時間継続し，そのための確実な音の高さがわかるような音．あるいは振動のための変化が緩やかで波形がほぼ規則的と見なされ得る音．音叉・楽器の出す音の類」です．人の声も楽音のようです．

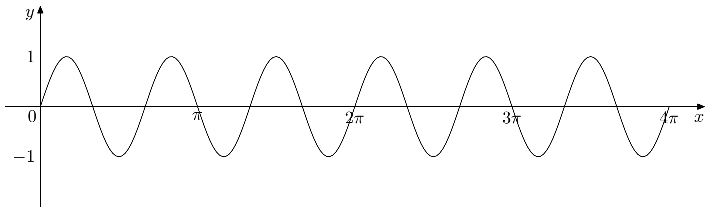
$a\sin x,\ a=2,-\frac{1}{2}$ のグラフです．$|a|$ は振幅ですが，**音の大きさ**は振幅の $|a|$ の大小で表されます．$y=2\sin x$ の方が， $y=-\frac{1}{2}\sin x$ より大きい音になります[12]．



次に，基音の周期 2π を $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$ 倍した $\sin 2x, \sin 3x, \cdots$ で表される音を基音に対する**倍音** と言います．次は 2 倍音のグラフです．



3 倍音のグラフは



となります．n 倍音 $\sin nx$ の周期は $\frac{2\pi}{n}$ です．これの逆数が振動数になります．**音の高さ**は振動数が大きいほど (すなわち，n が大きいほど) 高くなります．

基音と倍音を定数倍して足し合わせると，いろいろなグラフができますが，それぞれが**音の音色**になります．実は，最初に与えたグラフの関数は

$$f(x)=\sin x+\frac{2}{3}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 5x$$

でした．このように

「楽音を基音と倍音の定数倍の和で表す」

ことができます．これはフーリエ級数展開です．3 節のフーリエ級数展開は $y=f(x)$ を $[-\pi,\pi]$ で見ています．ここでは $[0,2\pi]$ ですが，周期 2π の関数なので，$[-\pi,0]$ の

[12] $a<0$ の場合は 4 節の (4.5) より $a\sin x=|a|\sin(x+\pi)$ となり，時刻を π だけずらした場合と考えられます．

部分を $[\pi, 2\pi]$ に平行移動したものになっています．戸惑う人がいるかもしれませんが，同じことであることを 9 節で説明します．

§6. テーラー級数展開再考

2 節の例題 1 の "解答" を厳密にするためにいくつかの事実を整理します．I を原点を含む開区間とし，f は I の各点で無限回微分可能とします．このとき，任意の n に対して，n 次テーラー展開は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad (0 < \theta < 1) \tag{6.1}$$

です．最後の項 $R_n(x) := f^{(n)}(\theta x)x^n/n!$ はラグランジュの剰余項と呼ばれ，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{6.2}$$

が成り立てば，任意の $x \in I$ について

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}) \tag{6.3}$$

と表されます．これを**テーラー級数展開**あるいは**ベキ級数展開**と言います．f は I で無限回微分可能でも，(6.2) が成り立たなければテーラー級数では表せないことを注意します[13]．(6.3) の**収束半径** ρ を次で定めます[14]．

$$\rho := \sup\{r \geq 0; \text{数列 } \{a_n r^n\} \text{ が有界 }\}. \tag{6.4}$$

$0 \leq \rho \leq \infty$ です．テーラー級数はよい性質があり，収束半径内では，次の項別微分，項別積分，展開の一意性が成り立ちます．

定理 3. $\rho > 0$ とする．任意の $x \in (-\rho, \rho)$ に対して次が成り立つ[15]．

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (\textbf{項別微分}) \tag{6.5}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (\textbf{項別積分}) \tag{6.6}$$

---

[13] 典型的な例が $f(x) = \exp(-1/x^2)$ $(x \neq 0)$，$f(0) = 0$ です．この f は $\mathbf{R}$ で無限回微分可能であり，任意の n について $f^{(n)}(0) = 0$ となりますが，(6.3) は成り立ちません．

[14] 収束半径と言う名前には違和感があるかもしれませんが，本来，ベキ級数は複素変数で考えるとより明確になります．この場合の収束領域は ρ を半径とする円板になっています．

[15] 正確に言うと $x \in I \cap (-\rho, \rho)$ で成り立つわけですが，$x \in (-\rho, \rho) \setminus I$ では f の値を (6.3) の右辺で定めることにより，$(-\rho, \rho) \subset I$ としてよいことを注意します．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{ならば } a_n = b_n \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{6.7}$$
(**展開の一意性**)

[**例題 1 の再解答**] まず，問題なのは f の定義域が何も書かれていないことです．ここでは I を原点を含む開区間とし，I で $f'(x) = f(x) + x$ が成り立つとします．右辺は微分可能なので，f' が微分可能で，結局は f は 2 回微分可能になります．これを繰り返すと f は無限回微分可能で $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) = \cdots = f''(x)$ です ($n \geq 3$)．よって $x \in I$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f''(\theta x)x^n}{n!} = 0$$

となり f はベキ級数展開ができます．さらに $\rho = \infty$ が分かり，脚注 15 より $I = (-\infty, \infty)$ としてよく，(6.5) から (2.3) が示され，(6.7) から (2.4) が導かれます．

ところで，$\cos x$ も $\sin x$ もベキ級数展開でき，その収束半径は ∞ です．すなわち，任意の $x \in \mathbf{R}$ について

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{6.8}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{6.9}$$

が成り立ちます．これらの x を nx として，(3.5) に次々に代入して整理すれば，どんな f もベキ級数に展開できそうに見えます．ところがそうではありません．結果的に言えば，無限個の足し合わせは有限個の場合と違って，足す順序の変更を自由にはできないのです．無限が絡むと直感に反することが多々起こります．解析学を真に理解するためには極限の概念を含めた無限の厳密な取り扱いに慣れることが重要です[16]．

§7. 集合と写像

この節では "関数の定義" と "可算集合" について述べます．広辞苑では**集合**とは「物の集まりで，任意の物がこれに属するかどうか，およびこれに属する 2 つのものが等しいか等しくないかということを判別し得る明確な基準があるもの」です．集合はそれを定める基準が明確でないといけません．「背の高い人の集まり」は集合になりません．「身長 180cm 以上の人の集まり」は集合です．集合に属するものを，**元**あるいは**要素**と言います．通常，集合はアルファベットの大文字を使い，その元は小文字を使います．a が集合 A の要素のとき，$a \in A$ または $A \ni a$ と表します．

広辞苑で**写像**を引くと「集合 A と B があり，A の各要素 x に，一定の規則 f によって B の各一要素 y がそれぞれ対応づけられるとき，f を A から B への写像と言い，

[16] $A = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ とします．$A = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$ です．一方，$A = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1$ です．どちらが正しいか？実はどちらも誤りです．後述の (8.1) によれば A の値は存在しません．

$f : A \to B$ と書く．また対応する要素を明示して $y = f(x)$ と書く」です．$f : A \to B$ のとき，A を写像 f の**定義域**と言い，

(7.1) $$\{y \in B;\ y = f(x) \text{ となる } x \in A \text{ が存在する }\}$$

を f の**値域**と言い，これを $f(A)$ と表します[17]．一般に $f(A) \subset B$ ですが，

(7.2) $$f(A) = B \text{ のとき } f \text{ は全射 (または上への写像)}$$

と言われ．$x, x' \in A, x \neq x'$ ならば

(7.3) $$f(x) \neq f(x') \text{ のとき } f \text{ は単射 (または 1 対 1 の写像)}$$

と言われます．さらに，$f : A \to B$ が全射かつ単射のとき f は**全単射**と言います．

最初の課題 "関数の定義" に答えましょう．関数は写像の特別なものです．写像 $f : A \to B$ において，

(7.4) 値域が $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ の部分集合のとき f を A 上の**関数**と言う．

特に，$f(A) \subset \mathbf{R}$ のとき f を実数値関数，$f(A) \subset \mathbf{C}$ のとき f を複素数値関数と言います．

もう一つの課題 "可算集合" に移ります．X を無限個の元からなる集合 (無限集合) とします．無限集合は 2 つに分類されます．X から自然数全体である $\mathbf{N}$ への全単射が存在するとき，X は**可算集合**と言います．存在しない場合は X を**非可算集合**と言います．ちょっと意外ですが整数全体の $\mathbf{Z}$ も有理数全体の $\mathbf{Q}$ も可算集合です．カントール (1845-1918) の対角線論法から実数全体 $\mathbf{R}$ は非可算集合であることが示されます．

$X := \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ については $f(x^n) = n + 1$ により $f : X \to \mathbf{N}$ は全単射になり，X は可算集合です．また，$Y := \{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ のときは，$f(\cos nx) = 2n + 1,\ f(\sin nx) = 2n$ を考えると $f : Y \to \mathbf{N}$ は全単射になり，Y も可算集合です．

一般に，無限集合の取り扱いには注意が必要ですが，可算集合は解析が比較的容易です．テーラー級数展開が可算集合 X の元であるベキ関数のみを使い，フーリエ級数展開も可算集合 Y の元である三角関数のみを使って表示できたことは幸いでした．

$\alpha \in \mathbf{R} \setminus (\mathbf{N} \cup \{0\})$ とします．一般のベキ関数 x^α は $x = 0$ で無限回微分可能でないので，代わりに $(1 + x)^\alpha$ を考えると

(7.5) $$(1 + x)^\alpha = 1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n + \cdots$$

と X の元のみを使って表されます．ただし $|x| < 1$ です．また，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} := \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

[17]写像を取り扱うときは，定義域と値域を明確にしないと混乱する原因になります．

は一般2項係数です．これは α が自然数 n のときは2項係数 ${}_nC_k$ に等しくなります．
一般の三角関数についても，$\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ とすると，$x \in (-\pi, \pi)$ のとき

$$\sin \alpha x = -\frac{2\sin \alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{\alpha^2-1} - \frac{2\sin 2x}{\alpha^2-2^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{\alpha^2-n^2} + \cdots\right\} \tag{7.6}$$

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha\sin \alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2-1} + \cdots + (-1)^{n}\frac{\cos nx}{\alpha^2-n^2} + \cdots\right\} \tag{7.7}$$

と Y の元を使って展開できます．さらに，(4.5) の加法定理から

$$\sin(\alpha x + \beta) = \cos\beta \sin\alpha x + \sin\beta\cos\alpha x \tag{7.8}$$

となるので，(7.6), (7.7) から $\sin(\alpha x + \beta)$ も Y の元のみを使って表すことができます．

§8. フーリエ級数の収束

一般に (無限) 級数の和は，第 n 部分和の極限で定めます．すなわち，数列の第 n 部分和を $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A \tag{8.1}$$

が成り立つとき

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と表します．フーリエ級数の収束についても同様です．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{8.2}$$

が成り立つとは，第 n 部分和を

$$s_n(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

としたとき，

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f, x) = f(x) \tag{8.3}$$

となることです．任意の $x \in [-\pi, \pi]$ で (8.3) が成り立つとき，(8.2) のフーリエ級数は**各点収束**すると言い[18]，さらに

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |s_n(f,x) - f(x)|\right\} = 0 \tag{8.4}$$

[18] (8.3) は，任意の $x \in [-\pi, \pi]$ について $\lim_{n\to\infty} |s_n(f,x) - f(x)| = 0$ と書けることに注意します．

が成り立つとき，(8.2) は**一様収束**すると言います．

フーリエ級数の収束に関して最初の明確な結果はディリクレ (1805-1859) が与えました．

定理 4. f を $[-\pi, \pi]$ 上の区分的に滑らかな関数とします[19]．

(1) f が $x = x_0$ で連続ならば，$x = x_0$ で (8.2) が成り立つ[20]．

(2) f が連続で $f(-\pi) = f(\pi)$ を満たせば (8.2) は一様収束する．特に，項別積分が可能で，$-\pi \le a < b \le \pi$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_a^b f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_a^b \cos nx dx + b_n \int_a^b \sin nx dx\right\} \tag{8.5}$$

が成り立つ．

テーラー級数展開と違って，項別微分については注意が必要です．フーリエ級数を構成する各項は微分可能ですから，項別微分が可能なら元の関数が微分可能でないといけなくなってしまいます．項別微分可能のための十分条件を一つ与えます．項別微分した

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \tag{8.6}$$

が $[-\pi, \pi]$ で一様収束すれば f は微分可能で (8.6) は $f'(x)$ に等しくなります[21]．

定理 4 の仮定を単なる連続関数に緩めることはできません．デュ・ボア・レイモン (1831-1889) が連続関数なのに (8.2) が成り立たないような例の存在を示しています．これに関連して次の問題が生じました．

問題 5. f は $[-\pi, \pi]$ 上の連続関数で $f(-\pi) = f(\pi)$ とします．

(1) f のフーリエ係数 a_n, b_n がすべて 0 ならば f は恒等的に 0 か？

(2) $E := \{x_0 \in [-\pi, \pi]; x_0$ で (8.2) が成り立たない $\}$ としたとき，E はどのような集合か？

すべての点で (8.2) が成り立てば明らかに (1) は YES で，(2) の E は空集合ですが，(8.2) が成り立たないこともあるので新しいアイディアが必要になります．

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の最初の $(n+1)$ 項 までの平均を b_n とします:

$$b_n := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

[19] 有限個の点を除いて微分可能で，f' は連続で，かつ，不連続点では f と f' の右極限と左極限が存在することです．ここで $x = a$ での右極限とは $f(a+0) := \lim_{x>a, x\to a} f(x)$ であり，左極限は $f(a-0) := \lim_{x<a, x\to a} f(x)$ です．$x = a$ で連続なら $f(a) = f(a+0) = f(a-0)$ です．f' についても同様です．

[20] $x = x_0$ で不連続なら (8.2) の右辺は $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$ に等しい．

[21] f が C^3 級のとき，$M > 0$ が存在して，$|a_n| \le M/n^3$，$|b_n| \le M/n^3$ が確認できて，ワイエルシュトラス (1815-1897) の優級数定理から (8.6) の一様収束が示されます．

これはチェザロ (1859-1906) の平均と呼ばれます．大学の初年次に ε-N 論法を使って

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{ならば} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = A \tag{8.7}$$

を学びます．この逆は成り立ちません[22]．チェザロ平均からなる数列は元の数列よりも収束し易くなります．

フェイェール (1880-1959) はこの事実をフーリエ級数に適用します．フーリエ級数の第 n 部分和 $s_n(f,x)$ の**チェザロ平均**を $\sigma_n(f,x)$ と書きます：

$$\sigma_n(f,x) := \frac{1}{n+1}(s_0(f,x) + s_1(f,x) + \cdots + s_n(f,x))$$

定理 6. f は $[-\pi,\pi]$ 上の連続関数で $f(-\pi)=f(\pi)$ とします．このとき，$\sigma_n(f,x)$ は $f(x)$ に一様収束する．

[**問題 5(1) の解答**] 答は YES です．フーリエ係数がすべて 0 ならば $s_n(f,x)$ は恒等的に 0 であり，これから $\sigma_n(f,x)$ も恒等的に 0 です．定理 6 より f は恒等的に 0 となります．

問題 5(2) の解答のためにはルベーグ積分の完成を待つことになります．ヒルベルト (1862-1943) 空間の初歩を学ぶと比較的簡単に次の事実を得ます．

定理 7. f は $[-\pi,\pi]$ 上の連続関数とします．このとき次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(f,x)|^2\,dx = 0 \tag{8.8}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{8.9}$$

(8.8) は $s_n(f,x)$ が f に **L^2-収束** (あるいは**平均収束**) すると言い，(8.9) は**パーセバル** (1755-1836) **の等式**と呼ばれます．(8.8) や (8.9) は (8.2) の成立とは無関係に成り立つことに注意します[23]．

さらにルベーグ積分の一般論から，(8.8) が成り立てば，$\{s_n(f,x)\}$ の部分列 $\{s_{n_k}(f,x)\}$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(f,x) = f(x) \quad \text{a.e.} \tag{8.10}$$

とできることが比較的容易に導かれます．ここで (8.10) の意味ですが，a.e. は "ほとんど至る所 (almost everwhere)" であって，(8.10) がほとんどすべての点で成り立つことを意味します．より正確に言うと，

$$E := \{x_0 \in [-\pi,\pi];\ x_0 \text{ で } s_{n_k}(f,x_0) \text{ が } f(x_0) \text{ に収束しない }\}$$

[22] $a_n = (-1)^{n-1}$ は収束しませんが，そのチェザロ平均は 0 に収束します．

[23] 定理 6 は $|f|^2$ がルベーグ積分可能なら成り立ちます．このときは，フーリエ係数 (3.4) もルベーグ積分で考えます．大学の初年次に学ぶ積分をリーマン積分と言います．連続関数はリーマン積分可能で，リーマン積分可能ならルベーグ積分も可能で両者の値は同じです．リーマン積分はできないがルベーグ積分が可能となる典型例は 3 節の脚注 6 のディリクレの関数です．

と定めたとき，E のルベーグ測度は 0 (ルベーグの意味で測った長さが 0) です[24]．

カルレソン (1928-) は (8.10) において部分列を取る必要がないことを示しました[25]．その証明は長くて難解ですが，フーリエ級数の収束に関する最終結果と言えるものです：

定理 8. f は $[-\pi,\pi]$ 上の連続関数とします[26]．このとき次が成り立つ：

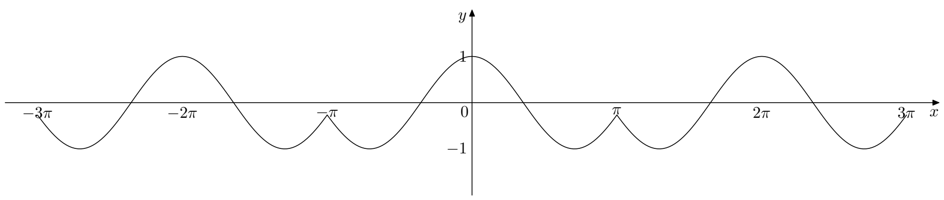
$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = f(x) \quad \text{a.e.} \tag{8.11}$$

[問題 5(2) の解答] 定理 8 より E はルベーグ測度 0 の集合になります．

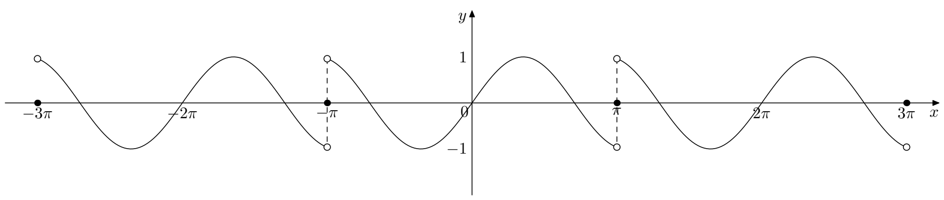
§9. 応用例

本来，フーリエ級数は $\mathbf{R}$ 上の周期関数を表すものです[27]．周期を 2π として，3 節の記述を周期関数に読み直してみます．f を $[-\pi,\pi]$ 上の関数とします．2 つの場合があります．(1) $f(-\pi)=f(\pi)$ のとき，(2) $f(-\pi)\neq f(\pi)$ のときです．

(1) の場合には $[-\pi,\pi]$ の関数を繰り返して $\mathbf{R}$ 上の関数 f^* に拡張します．これは周期 2π の周期関数になります．f が連続なら f^* も連続ですが， f が微分可能でも f^* はつなぎ目で微分可能にならないこともあり得ます．例えば，$f(x)=\cos\alpha x$ のとき，$y=f^*(x)$ は下記です．左辺を $f^*(x)$ とすれば (7.7) はすべての実数 x で成り立ちます．下図は $\alpha=\sqrt{2}$ です．



(2) の場合は $a:=(f(-\pi)+f(\pi))/2$ として，$x=\pm\pi$ での値を a にした関数を $\tilde{f}$ とします．$\tilde{f}$ は (1) をみたすので $\mathbf{R}$ 上の周期関数 $\tilde{f}^*$ が定まります．注意すべきことは，f が連続でも $\tilde{f}^*$ は連続になるとは限らないことです．ただし，f と $\tilde{f}$ のフーリエ係数はすべて同じです．例えば， $f(x)=\sin\alpha x$ のとき $a=0$ として $y=\tilde{f}^*(x)$ は下記のようになります．左辺を $\tilde{f}^*(x)$ とすれば (7.6) はすべての実数 x で成り立ちます．下図は $\alpha=\sqrt{2}$ です．



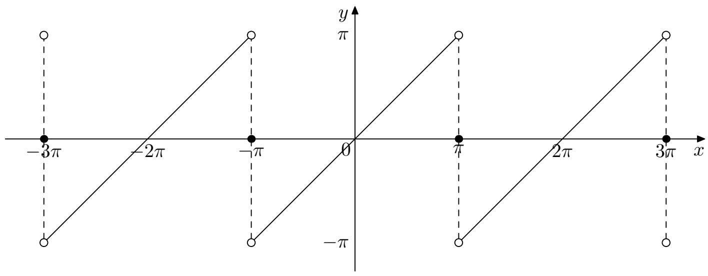
[24]ルベーグ測度 0 の集合とは，正確にはルベーグ測度を学ばないと定義できませんが，集合が非常に小さいことを意味します．

[25](8.11) は (8.10) と比べてものすごく良い結果であることを認識することは重要です．(8.10) の問題点は，部分列が f に依存してしまうことです．(8.11) にはその心配はありません．

[26]定理 6 と同様に $|f|^2$ がルベーグ積分可能なら成り立ちます．

[27]周期関数でない場合はフーリエ変換を考えることになります．

別の例を見てみましょう． $f(x) = x\ (-\pi < x < \pi)$, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ を周期関数と考えたものは**鋸歯 (のこぎりは) 関数**と呼ばれます．



この関数のフーリエ級数展開からいくつかの有名な級数の値を求めることができます．

例題 9. (1) 鋸歯関数のフーリエ係数を求めよ．
(2) 鋸歯関数のフーリエ級数展開を求めよ．
(3) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ (**ライプニッツの級数**).
(4) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ を示せ (**オイラーの級数**).

[**解答**] (1) $f(x)\cos nx$ は奇関数なので $a_n = 0$ はすぐにわかります[28]．$n \geq 1$ として，b_n については部分積分を行ない，$\cos n\pi = (-1)^n$ に注意すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} dx \\ &= \frac{2}{n\pi}(-\pi\cos n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

(2) 定理 4(1) および脚注 20 から $[-\pi, \pi]$ 上で次の等式が成り立ちます．

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \tag{9.1}$$

(3) (9.1) で $x = \dfrac{\pi}{2}$ とする．$\sin\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ (-1)^k & (n = 2k+1) \end{cases}$ より $\dfrac{\pi}{2} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

(4) パーセバルの等式より $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dfrac{2}{3}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$ となり (4) がわかります．

フーリエの功績は級数展開だけでなく，温度が熱方程式をみたすという熱伝導の理論を打ち立てたことです．具体的な例で説明します．半径 1 の円周からなる針金があります．円周と $[-\pi, \pi]$ を同一視して，円周上の関数を周期 2π の関数と考えます．$t = 0$ での針金の $x \in [-\pi, \pi]$ での温度を $f(x)$ とし，時刻 $t > 0$ での温度を $u(x, t)$ とします．

例題 10. $t = 0$ での温度分布 f を与えたとき，時刻 $t > 0$，点 $x \in [-\pi, \pi]$ での温度 $u(x, t)$ を求めよ．

---

[28] $\displaystyle\int_{-a}^{a}(\text{奇関数})dx = 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a}(\text{偶関数})dx = 2\int_0^a(\text{偶関数})dx$.

[**解答**] フーリエの熱伝導の理論によれば $u(x,t)$ は次をみたします：

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(i)} & u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) & \text{(熱方程式)} \\ \text{(ii)} & u(x,0)=f(x) & \text{(初期条件)} \\ \text{(iii)} & u(x,t)=u(x+2\pi,t) & \text{(周期性)} \end{array}\right. \tag{9.2}$$

まず，f をフーリエ級数展開します．$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ dx$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ dx$ とすると

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{9.3}$$

です．次に，時刻 $t>0$ を固定て，x の関数 $u(x,t)$ をフーリエ級数展開します．

$$u(x,t)=\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(t)\cos nx+b_n(t)\sin nx) \tag{9.4}$$

ただし，

$$a_n(t):=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\cos nx\ dx,\quad b_n(t):=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\sin nx\ dx \tag{9.5}$$

です．$u(x,t)$ を求めるため $a_n(t)$ と $b_n(t)$ を決定します．微分と積分の順序を変えて (i) の熱方程式を使うと

$$\frac{d}{dt}a_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_t(x,t)\cos nx\ dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_{xx}(x,t)\cos nx\ dx=(*)$$

となります．部分積分を行うと

$$(*)=\frac{1}{\pi}\left\{[u_x(x,t)\cos nx]_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}u_x(x,t)\sin nxdx\right\}=(**)$$

ですが，(iii) の周期性から $u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t)$ なので，第 1 項は 0 になります．第 2 項に再度部分積分を行い，$\sin n\pi=0$ に注意すると

$$(**)=-n^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\cos nxdx=-n^2a_n(t)$$

を得ます．(ii) の初期条件から $a_n(0)=a_n$ なので，結局，$a_n(t)$ は

$$a_n'(t)=-n^2a_n(t),\quad a_n(0)=a_n$$

となり，この微分方程式解くと

$$a_n(t)=a_ne^{-n^2t}$$

を得ます．同様に $b_n(t)=b_ne^{-n^2t}$ です．以上から，求める解は

$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)e^{-n^2t} \tag{9.6}$$

となります．この解答に問題があるとすれば，f が連続関数としたとき，(9.3) が成り立つとは限らないことです．

参考文献

[1] 岡本久・長岡亮介，“関数とは何か” 近代科学社，2014.
[2] 鈴木紀明，“解析学の基礎” 学術図書出版社，2013.
[3] 高橋陽一郎，“実関数と Fourier 解析 1” 岩波書店，1996.