良い問題を作ること

鈴木紀明
名城大学理工学部

第 98 回全国算数・数学教育研究 (岐阜) 大会
高等学校部会 (長良高等学校)
2016 年 8 月 4 日

「問題を解決することよりも，問題を見出すこと，従って，問題を提起することの方が肝心なのである.」　　　アンリ・ベルクソン

“折々のことば”　鷲田清一　(朝日新聞 2016.1.26)

「人に解けない問題を作るのと，その問題を解くのでは，どちらが難しいか.」

“容疑者 X の献身”　東野圭吾

「自分で作った問題を解いたことのない学生の数学的経験は不完全なものである．教師は解けた問題から新しい問題をどうやって作るかを示して，学生の好奇心をそそる....」

“いかにして問題をとくか”　G. ポリア

数学の問題と言うと,

(1) リーマン予想や P$\neq$NP 予想などの未解決問題,
(2) 大学入試問題，定期考査の問題，授業の練習問題,
(3) 数学オリンピックや日本数学コンクールの問題

などが思い浮かびます.

よい問題は数学研究の発展と教育効果の向上に寄与します．本講演では幾つかの例を取り上げながら，良い問題における

“3 つの E ”

の重要性を強調して，これらを踏まえた問題作りの必要性に触れます.

良い問題のための “3 つの E”

Extensive(広がり)
発展性，広範な，関係性，影響力，萌芽

Effective(有効な)
妥当性，信頼性，現実性，納得，達成感

Exciting(魅力的)
刺激的，驚き，誘い，面白さ，情緒

$\boxed{\text{広がりがあり，有効で刺激的な問題を高校生に出しましょう}}$

1 節　数学の研究から見た良い問題

1.1 節 未解決問題

1.2 節 数学の研究

1.3 節 数学を育てた問題

1.4 節 ディリクレ問題

1.5 節 素数定理

2 節　数学の教育から見た良い問題

2.1 節 入試問題

2.2 節 センター試験

2.3 節 授業における練習問題の工夫

2.4 節 定期試験における工夫

3 節　数学の魅力を伝える問題

3.1 節 日本数学コンクール

3.2 節 日本数学コンクールの過去問の例

3.3 節 高木貞治

3.4 節 数学の存在意義

未解決問題が数学研究の発展に寄与した部分は大きい.

(1) ヒルベルトの 23 問題 (1900 年 8 月にパリで開かれた第 2 回国際数学者会議 (ICM) でのヒルベルトの講演)

(2) スメイルの問題 (2000 年にスメイルが提唱した 18 の問題, 100 年前のヒルベルトの問題を意識した)

(3) ミレニアム問題 (2000 年にアメリカのクレイ研究所によって発表された 7 つの問題．100 万ドルの賞金)

注意 1. いずれにも取り上げられているのが "リーマン予想"
注意 2. (1) で未解決は，第 6, 8, 12, 16, 23
注意 3. (3) では "ポアンカレ予想" が解決 (ペレルマン)
注意 4. スメイルは $n \geq 5$ に対するポアンカレ予想を証明した.

● 数学の研究とは “問題を解くこと” と思われているかもしれないが，実際は “問題を作る (=新しい見方をする) こと” である．よい数学研究とはよい問題を作ることである．

● 機械がどんなによく働くとしても，それは課された問題をすべて解くことはできるであろうが，一つの問題を考え出すこともできない．(アインシュタイン)

● (良い問題との出会い) ガウスは大学生の時にラテン語を専攻するか数学を専攻するか悩んでいたが，正 17 角形が作図できることを発見して，自分の将来の進路を数学者とすることを決めたと言われている．

数学を育てた問題とその後 (数学セミナー 2005 年 11 月号)

(1) 3 対問題,

(2) ディリクレ問題

(3) 特異点解消

(4) ビーベルバッハ予想

(5) 有限単純群の分類問題

17 世紀後半のニュートンの万有引力の法則の発見以来，重力，静電気学，熱伝導，弾性理論などの多くの物理現象がラプラス作用素

$$\boldsymbol{\Delta} := \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2}$$

に関する境界値問題として定式化された．これがポテンシャル論の始まりである.... (中略) ディリクレ問題とは「与えられた境界値を持つ調和関数を見つける」ことであり，例えば，境界上の温度分布がわかったときに，内部の点での温度を求めることである．

ディリクレ問題の波乱に富んだ歴史は様々な解法を生み出す．ガウスの変分法，ディリクレ原理，算術平均法，交代法，掃散法，直接法，内部近似法，PWB 法，そしてブラウン運動による表示などである．これらを萌芽として如何なる数学が育ったのかを少し詳しく見ていこう.....

素数定理とは自然数 n までの素数の個数を $\pi(n)$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\log n}{n} = 1$$

が成り立つ，別の言い方をすれば

「n 番目の素数は大体 $n\log n$ である」

ガウスは 15 歳 (1792 年) のときにこれを予想したと言われている．リーマンは 1859 年にオイラーのゼータ関数を複素変数に拡張して，素数定理の主張をゼータ関数の零点と結びつける．リーマンは素数定理の証明には至らなかったが，この時に，いわゆる “リーマン予想” を主張した．最終的には，1896 年にアダマールとドゥ・ラ・バレ・プーサンが複素関数論を用いて証明に成功する．

素数定理はリーマン予想の “生みの親” である．

テスト理論における良いテストのキーワードは

- 妥当性：本当に測定したいものを測定しているか
- 信頼性：結果が状況に左右されずに一貫しているか

大学入試で言えば，来てもらいたい学生を選ぶ (妥当性)，実力通りの結果がでる (信頼性) ことで，言い換えれば，ミスマッチを防ぎ，水物でない (運に左右されない，努力に比例する) 問題.

- 入学後のミスマッチを防ぐ：

入試問題は大学から受験生へのメッセージである
出題範囲 ＝ 大学入学後の講義の前提

- 水物にしない：

一つのミスの影響を軽減．各設問を独立させる.
数学では難しい？ 満点にも零点にもなるのが数学の特徴.
数学者はストーリーのある問題 (相互に関係している) が好き?

広島大学，名古屋大学そして現在の名城大学に所属したが，どこでも入試問題作成には相当の時間をかけ，採点も非常に丁寧にしている (数学が採点に一番時間がかかる).

● 数学の問題は数学教員が作り数学教員が採点している

作題：数学教員は (無意識ではあるが) 数学科へ入学する学生を想定して作題する？

採点：誰が採点しても振れない採点基準 (詳細な部分点)．完答と部分点の和．数学教員が採点している利点が失われる？

● それぞれの教科は独立して作成 (傾斜得点配分で対応？)

● **センター試験の問題点**

(0) 多様な大学の入試を一つの問題で行う

(1) 高校教育への悪影響

センター試験対策のため本来の数学の問題 (2 次試験) の対策 (準備) ができない (遅れる)

努力に応じて結果がすぐ出る?手がつけ易い

(2) 論理的思考力の低下，結果の確認をしない

答を整数で与えるため，厳密な議論をしないで類推できる？

解答の箱の数が合えば OK

● 高大接続システム改革会議
(1) 高等学校教育改革
(2) 大学教育改革
(3) 大学入学者選抜改革

● 新テスト＝ 大学入学希望者学力評価テスト (仮称) の導入
(1) 基本はマークシート式
(2) 国語と数学に「条件付記述式」
(3) 問題イメージが昨年暮に発表される (数学は “スーパームーン”)

● 問題点
(1) 実施上の問題 (各大学で採点？答案のコピーは？)
(2) 内容の問題 (簡易な記述式で論理的思考力や解答作成能力が測れるか？)

(1) 私の大学では多くが教員を目指している．4 年になると，採用試験の対策を重視して，数学の専門の講義を軽視する傾向がある．

● 採用試験の過去問を解く方がより合格に繋がる？
● 専門の講義より採用試験対策の問題の方が手をつけ易い．
● 専門の勉強は教員になってから役に立つ (と思いたい)．生徒からの質問に自信を持って答えられる教師になってもらいたい．

(2) 学生は自分の出した答えに全く無頓着です．本当にその答えでよいのかの検証をやりません．実は，“やらない” のではなくて “やれない” のではないかと危惧します．実際，これらはいくつかの知識が有機的に結びついていないとできないことです……
(工学系学生に対する数学基礎教育について–何をどのように教えるか– (名城大学教育年報 (第 6 巻)2012 年 3 月) から抜粋)

● 闇雲な計算だけでなくて，(厳密性に欠けたとしても) 概略的に類推や検証をすることも重要であるということ．

2.3節 授業における練習問題の工夫

[1] n と m は3以上の整数とします. $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}>\dfrac{1}{2}$ となるような (n, m) の組をすべて求めよ.

[2] $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$ と
$2\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$ を示せ.

[3] 一次変換 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ は複素平面内の円を円に写すことを示せ.

[4] (1) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots$ を示せ.

(2) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$ を示せ.

(3) $\dfrac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots$ はよいか?

(4) $\log 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$ はよいか?

[1] 数学的背景のある問題 (解は 5 組ある．オイラーの多面体定理と組み合わせると，それらが 5 つの正多面体に対応している)

[2] 公式を自分で導く．知っていることを総動員 (前式を a で微分すると後式が出る).

[3] 理論を使った計算 (一次変換は 3 つの基本変換 (回転，拡大，平行移動) の合成で表されることがわかれば，基本変換についてのみ調べればよい)(「数学とはなるべく計算を避ける技術である」マクミラン)

[4] 直感の魅力と危うさ (「証明は論理により，発見は直感による」ポアンカレ “科学と方法”)

(複素関数論 (数学科 3 年) の定期試験の問題例)

(1) $f(z) = \dfrac{e^{ibz}}{z^2 + a^2}$ $(a, b > 0)$ の特異点での留数を求めよ.

(2) $C_{1,R}$ を半径 R の半円, $C_{2,R}$ を線分 $[-R, R]$,

$C_R := C_{1,R} + C_{2,R}$ として $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz$ を計算せよ.

(3) $\displaystyle\int_{C_{2,R}} f(z)dz \ \to 0 \ (R \to \infty)$ を示せ.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ab}$ を確認せよ.

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin bx}{x^2 + a^2} dx$ の値を求めよ.

- 基本的な考え：試験は評価のためだけでなく 16 回目の講義.
- 試験時は学生が一番よく考える時間．力をつける絶好の機会
- 考察の方針を与える.
  (i) 定理を忘れてもその場で考えることができるための工夫
  (ii) 定理 (公式) のみから解答することを防ぐ.
  (iii) 答えを与えて計算ミスを見直させる.
- アドバンスな問題 (刺激的な問題) を付け加える.
  (4) を微分すると (5) が求まる.

日本数学コンクールは名古屋大学の事業として，愛知・岐阜・三重の大学と高校・中学の数学教師有志により 1990 年から始まり，現在も続いている．

“自由にゆったり考える”，“楽しい数学の発見”，
“多彩な才能の評価”，“すぐれた人材の育成”

を特色として，中高校生に夏の暑い 1 日，興味深い数学にどっぷり浸かって考えてもらおうということであり，優秀な解答者を 11 月の文化の日の前後に表彰している．27 回目が今年も名古屋大学をはじめ 5 つの会場 (名古屋，大阪，津，福井，橋本) で 8 月 7 日に開催される．(和歌山県橋本市は岡潔生誕の地)

● 試験は全部まる暗記ですませていた．まる暗記の力では私は人よりすぐれていた．… いっぺん覚えたら忘れないという力でなく，しばらくの間覚えているというずるい力だが，この力は場合によっては随分大切ではないかと思う．… 私はこの力はぜひ必要だと思っている…

● この 3 学期に同じ杉谷先生から方程式の解法について「5 次方程式から先はこのやり方では解けない．アーベルの定理と言って，解けないことがちゃんと証明されている」… この定理の話が日がたつにつれて印象鮮明となり「解けないことを，いったいどうやって証明するのだろう」と考え込んだ．… 将来は工科に進もうと思っていたが，このころから疑問を持ち始めた．… アインシュタインの影響で… 京大理学部の物理学科に入った．… 入ってみると物理は好きになれなかった．「実験が下手だから」と自分では答えていたが，実際はアーベルの定理の方が高尚な気がしたからだった．
(岡潔 “春宵十話” より)

(1) 夜空に歩いていてふと見上げると月が一緒に歩いてくるように見えます．また列車の車窓から眺める雲は列車の進行と同じ方向に動いて見えます．これらはどう説明できるのでしょうか？
(“月の追跡” 2005 年)

(2) 100 年に 1 回の割合で起こる危機と 1 万年に 100 回起こる危機とどちらがの被害が大きいでしょうか？
(“危機管理” 2012 年)

(3) 二つの地点の直線距離と道路距離 (道路に沿ったなるべく短いルートの長さ) の比の平均を理論的に推察しなさい.
(“道路距離と直線距離” 2015 年)

(4) $a < b$ は 9 以下の自然数とする. $\dfrac{a\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{A}}b} = \dfrac{a}{b}$ となる整数 A が存在するのはいつか？
(“すごい約分” 2011 年)

例えば $\dfrac{1\boxed{\mathbf{428571}}}{\boxed{\mathbf{428571}}3} = \dfrac{1}{3}$

1875 年 4 月 21 日　岐阜県大野郡数屋村 (現・本巣市) に生まれる.

高木貞治記念室
出身地の本巣市に「高木貞治記念室」が設置されている.
遺品や関連資料の展示が行われている
住所：岐阜県本巣市三橋 1101-6（糸貫老人福祉センター内）
開館時間：9:00-16:00
休館日：月曜日（祝祭日の場合は翌日）年末年始
入館料：無料

下村 (寅太郎) は学問への目覚めということを重く見たようで,
「高木先生の数学的天才を触発して数学専攻を志す動機となった
のは河合 (十太郎) である」と指摘した.
大学の数学科に入ってくるのは，その時点ですでに数学専攻を決
意した人で，彼らを数学者に仕上げるのは大学教授である．だが,
数学に目覚め，数学者たらんと志を立てしめるのは高等学校の教授
であり，高木の裡に潜在する数学的天分を見出してこれを自覚せ
しめたのは河合の重要な功績である....

高瀬正仁著：高木貞治とその時代 (東京大学出版会，2014 年)
171 ページより

数学の有用性として，他の分野の基礎になっていたことや，日常に現れる数学について述べることは重要であろう.

- アインシュタインの相対性理論における “リーマン幾何”
- CT(コンピュータ診断装置) の原理は “ラドン変換”
- ブラック・ショールズの金融工学における “伊藤の補題”
- 公開鍵暗号と “素数理論”

高校の教科書の中の写真：
高速道路 (緩和曲線)，パラボラアンテナ (放物面)，噴水 (放物線)，法隆寺五重の塔 (サイクロイド)，パルテノン神殿 (黄金比)，ひまわり (フィボナッチ数列) など

応用面 (役に立つこと) を強調しすぎる？数学そのものの価値を伝える.

● ハーディー：“ある数学者の生涯と弁明” (シュプリガー・ジャパン)
「応用というよりは，数学は数学そのものの為に追求されるべきである」彼にとって最も美しい数学というものは，数学以外において何も応用性を持たないものであった.

● 伊藤清：“確率論と私” (岩波書店)
「私が想像もしなかった金融の世界において “伊藤理論が使われることが常識化した” という知らせを受けたときはには，喜びより，むしろ大きな不安に捉われました.」「私はこれまでの人生において，株やデリバティブはおろか，.... 定期預金しか利用したことがない “非金融国民” なので....」応用は必ずしも本意ではなっかた.

数学の歴史や話題について何も知らない学生が多い

- 正多面体
- 角の 3 等分不可能性
- ユークリッド原論
- 等周問題
- フェルマーの定理
- 素数は無限個
- 複素数と 3 次方程式
- アーベルとガロア
- $\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \cdots = \infty$
- $\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^2}} + \cdots = \frac{\pi^{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}}$
- $-\mathbf{1} = \sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-\mathbf{1}} = \sqrt{(-\mathbf{1})(-\mathbf{1})} = \sqrt{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$?

答はわからなくてもよい．これらについて講義で学ぶときや自分で解決できるときまで疑問を持ち続けることが大切であると思う．

先日，小学生に $\mathbf{50} + \mathbf{50} = ?$ の話をした．メスシリンダーで水とアルコールを 50cc 測って混ぜ合わせると

$$50\textbf{cc(水)} + 50\textbf{cc(アルコール)} = 98\textbf{cc}$$

であった．小学生には疑問を持ち続けてもらうことにした．安易な解答は言わないほうがよい．自分で納得することが重要であろう．

高校生のとき，ロピタルの定理の主張: $f(a)=g(a)=0$ のとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

である事実を聞いて，不思議な結果だと思っていたが，ある日

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

と考えて納得できたことは，より数学好きになった要因の一つ.

高校の先生方にお願いしたいこと：良い問題を示して，才能豊かな高校生を “数学の世界” に引き込みましょう