

2次元調和関数のいくつかの話題

ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれ、物理学や工学でも重要である。2次元の調和関数の基本的性質を複素関数論の援助を借りて整理し、それらをいくつかの話題に応用する。

- §1. 正則関数の基本性質の確認
- §2. 2次元調和関数の基本的性質
- §3. 調和関数の逆平均値の定理
- §4. 単位円板におけるディリクレ問題
- §5. 楕円領域におけるディリクレ問題
- §6. ディリクレ原理による解法
- §7. 上半平面におけるディリクレ問題
- §8. ラドン変換の非一意性を示す調和関数の存在
- §9. 半平面の調和関数による特徴付け
- [付録 1] 複素数の効用
- [付録 2] ディリクレ問題の歴史

2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の点を X または (x, y) で表わす。 $\mathbf{R}^2$ は複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視できる。

$$\mathbf{R}^2 \ni X = (x, y) \longleftrightarrow z = x + iy \in \mathbf{C}.$$

この同一視によって、 $X = z$ と書き、関数 f の値も $f(X) = f(x, y) = f(z)$ である。なお、原点は $O = (0, 0)$ と書くが、 $0 = 0 + i0$ の関係から、単に $O = 0$ と書く。 $\mathbf{R}^2$ の (可則な) 部分集合 A について

∂A で A の境界、 $\bar{A}$ で A の閉包、 A° で A の内部、 $|A|$ で A の面積

を表わす。 $X \in \mathbf{R}^2$, $r > 0$ に対して、 $D(X, r)$ で中心 X , 半径 r の開円板を表わす。このとき

$$\partial D(X, r) \text{ は円周, } \overline{D(X, r)} \text{ は閉円板, } D(X, r)^\circ = D(X, r), \quad |D(X, r)| = \pi r^2$$

である。領域 (= 連結開集合) Ω 上の C^2 -級関数 $h(x, y)$ が、ラプラス方程式

$$\Delta h(x, y) := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

を満たすとき、 h は Ω 上の**調和関数**と呼ばれる。以後、調和関数は常に実数値とする。

§1. 正則関数の基本性質の確認

領域 Ω 上の (複素数値) 関数 f は Ω の各点で微分可能、すなわち、任意の $z \in \Omega$ に対して

$$f'(z) := \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \quad \text{が存在して}$$

かつ $f'(z)$ が Ω で連続になるとき Ω 上の**正則関数**と言う¹。

¹実は f' の連続性を仮定する必要はない。 f が Ω のすべての点で微分可能ならば、後の (1.2) の主張が示される (グルサの定理)、これから (1.3), (1.4) が導かれて、 f' は連続になる。さらに、べき級数展開ができることから f は無限回微分可能になる。 f' の連続性を仮定する理由は、グリーンの定理を使って (1.2) を示したいからであろう。

定理 1.1 (コーシー・リーマンの関係式) [11, 定理 3.2]) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする. f が Ω で正則である必要十分条件は u, v が Ω で C^1 級でかつ, コーシー・リーマンの関係式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ を満たすことである. このとき次が成り立つ:

$$(1.1) \quad f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y) \quad (\forall z = x + iy \in \Omega).$$

始点と終点が一致しそれ以外では交わらない曲線を**ジョルダン閉曲線**と言う. ジョルダン閉曲線は有界な領域を唯一つ定める (ジョルダンの曲線定理). それを C の内部と言い, (C) で表わす. (C) を左側に見て進む方向 (反時計回り) を曲線 C の正の向きと約束する. 以下, 曲線はすべて区分的に滑らかとする².

定理 1.2 (コーシーの積分定理とモレラの定理) [11, 定理 5.1, 定理 5.4]) f は領域 Ω 上の連続関数とする. f が正則なら $(C) \subset \Omega$ を満たすジョルダン閉曲線 C に対して

$$(1.2) \quad \int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ. 逆に $(C) \subset \Omega$ を満たす任意のジョルダン閉曲線 C に対して, いつも (1.2) が成り立てば f は Ω で正則である.

問題 1.1 グリーンの公式 $\int_C Pdx + Qdy = \iint_{(C)} (-P_y + Q_x) dxdy$ を使って, f が正則なら (1.2) が成り立つことを示せ.

定理 1.3 (コーシーの積分公式) [11, 定理 5.2]) f は領域 Ω で正則とする. $(C) \subset \Omega$ を満たすジョルダン閉曲線 C に対して

$$(1.3) \quad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (\forall \zeta \in (C))$$

が成り立つ. さらに, 任意の $n \in \mathbf{N}$ について

$$(1.4) \quad f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz \quad (\forall \zeta \in (C)).$$

領域 Ω 内の任意のジョルダン閉曲線 C に対して $(C) \subset \Omega$ がいつも成り立つとき, Ω は**単連結**と言う. 直感的には Ω に穴が空いていないことである. また, Ω 上の正則関数 F が $F' = f$ を満たすとき F は f の**原始関数**と言う.

定理 1.4 (原始関数の存在) [11, 定理 5.3]) 単連結領域 Ω 上の正則関数にはいつも原始関数が存在する.

単連結でないと原始関数の存在は保障されない.

問題 1.2 $\{0 < |z| < 1\}$ (穴あき円板) 上の正則関数 $1/z$ の原始関数は存在しないことを示せ.

²曲線とは $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) と連続関数 $x(t), y(t)$ を使って媒介変数表示されるものを言う. $z(a)$ が始点, $z(b)$ が終点である. $x(t), y(t)$ が C^1 級のときに滑らかな曲線と言う. このとき $\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ である. 区分的に滑らかな曲線とは有限個の滑らかな曲線を繋げたものである.

定理 1.5 (一致の定理 [11, 定理 8.4]) f, g は領域 Ω で正則とする. 次の条件 (1) または (2) が成り立てば $f \equiv g$ である.

- (1) ある点 $z_0 \in \Omega$ で $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ ($\forall n = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つ.
- (2) Ω の点列 $\{z_n\}$ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in \Omega$ ($z_n \neq z_0$) かつ $f(z_n) = g(z_n)$ ($\forall n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすものが存在する.

問題 1.3 $f(z) = e^{(2\pi i)/z} - 1$ は右半平面 $\{z; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ で正則で, $z_n = 1/n$ は零点であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ であるが $f \neq 0$ である. これは定理 1.5 (2) に矛盾しないか?

定理 1.6 (最大値の原理 [11, 定理 7.1]) f は領域 Ω で正則とする.

- (1) $|f|$ が Ω 内で極大値をとれば f は定数関数である.
- (2) Ω が有界で, f が閉包 $\bar{\Omega}$ で連続ならば, $|f|$ は $\bar{\Omega}$ での最大値を境界 $\partial\Omega$ 上で取る.

定理 1.7 (べき級数展開とローラン展開 [11, 定理 6.3, 定理 10.1])

- (1) f が円板 $D(z_0, R) := \{|z - z_0| < R\}$ で正則ならば,

$$(1.5) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

とべき級数の形で書ける. さらに

$$(1.6) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (0 < \forall r < R, \forall n = 0, 1, 2, \dots).$$

- (2) f が環状領域 $A(z_0, R_1, R_2) := \{R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ で正則ならば,

$$(1.7) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad (\forall z \in A(z_0, R_1, R_2))$$

と展開できる (ローラン展開). さらに

$$(1.8) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (R_1 < \forall r < R_2, \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

定理 1.8 (一様収束極限 [11, 定理 6.1]) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は領域 Ω 上の正則関数の列とする. f_n が Ω 上の関数 f に広義一様収束すれば f も Ω で正則である.

§2. 2次元調和関数の基本的性質

2次元の調和関数は正則関数と密接に関係する.

定理 2.1 ([11, 定理 14.1]) Ω を $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ の領域とする.

- (1) f が Ω で正則ならば, $u := \operatorname{Re} f$ と $v := \operatorname{Im} f$ は Ω 上の調和関数である.
- (2) h が Ω で調和で, さらに Ω が単連結であれば, $h = \operatorname{Re} f$ となる正則関数 f が Ω 上に存在する (f は定数の差を除いて一意に定まる).

問題 2.1 $\Omega := \{(x, y); x > 0, y > 0\}$ (第1象限) とする. $\log(x^2 + y^2)$ と $\arctan(y/x)$ はともに Ω 上の調和関数であることを確かめよ.

問題 2.2 (1) 定理 1.7 のべき級数展開から正則関数は何回でも微分できる. これより $f = u + iv$ としたとき u, v は C^∞ 級である. この事実とコーシー・リーマンの関係式から定理 2.1 (1) を示せ.

(2) 次の (i), (ii) に従って定理 2.1 (2) に証明を与えよ：
 (i) h が調和関数のとき $g(z) := h_x(x, y) - ih_y(x, y)$ は Ω で正則になる。
 (ii) 定理 1.4 から g の原始関数 G が Ω に存在する。 $z_0 \in \Omega$ を取り、 $f(z) = G(z) - G(z_0) + h(z_0)$ とすれば、 f が求める関数である。

定理 2.2 (等角不変性) D, Ω を 2 つの領域として、 $\phi: D \rightarrow \Omega$ を上への等角写像 (ϕ は D で正則でかつ 1 対 1) とする。 h が Ω 上の調和関数ならば、 $h(\phi(z))$ は D で調和である。

問題 2.3 定理 2.2 を以下の 2 通りの方法で示せ：

- (1) 定理 2.1 を用いて、正則関数の合成関数微分を使う。
 (2) $\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ のとき $h(\phi(z)) = h(u(x, y), v(x, y))$ のラプラシアンを直接計算する。

定理 2.3 (調和関数の平均値の定理) [11, 定理 14.2 (3)] h は領域 Ω で調和で、円板 $D(X_0, r)$ が $\overline{D(X_0, r)} \subset \Omega$ を満たせば、 $X_0 = (x_0, y_0)$ のとき

$$(2.1) \quad h(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta$$

が成り立つ。逆に、 h は Ω で連続で、 $\overline{D(X_0, r)} \subset \Omega$ を満たす任意の円板について (2.1) が成り立てば、 h は調和関数である。

この定理の後半の主張は積分の条件から微分可能性が示されて興味深い。証明は、後述の §4 の結果を使わないと (少なくとも私には) できないので、後回しにする (問題 4.5)。

問題 2.4 $\overline{D(X_0, r)} \subset D \subset \Omega$ なる単連結領域 D を取って、コーシーの積分公式 (1.3) から (2.1) を導け。

定理 2.4 (調和関数の一致の定理) [11, 定理 14.2 (1)] h は領域 Ω で調和とする。 Ω 内の空でない開集合 D 上で h が定数 c ならば Ω 上で $h \equiv c$ である。

[証明] $g(z) := h_x(x, y) - ih_y(x, y)$ とすると問題 2.1 (2) (i) より g は正則関数である。さらに g は D で 0 なので、一致の定理 (定理 1.5) より Ω で恒等的に 0 である。よって $h_x = h_y \equiv 0$ なので、 h は Ω で定数であるが、 D で c なので、その定数は c である。

問題 2.5 上記の証明で $g \equiv 0$ となる理由を述べよ。

定理 2.5 (調和関数の最大値の原理) [11, 定理 14.2 (2)] h を領域 Ω で調和とする。

- (1) h が Ω 内で極大値を取れば h は定数関数である。
 (2) Ω を有界とする。 h が $\overline{\Omega}$ で連続とし、境界 $\partial\Omega$ 上で $h \leq 0$ が成り立てば、 Ω 内においても $h \leq 0$ が成り立つ。

[証明] (1) $z_0 = x_0 + iy_0$ で h は極大値を取ったとする。すなわち、 z_0 を中心の円板 $D := D(z_0, r)$ が存在して $h(z_0) \geq h(z)$, $\forall z \in D$ が成り立つとする。 D は単連結なので、 $\operatorname{Re}(f) = h$ となる正則関数 f が D に存在する。 $g(z) := e^{f(z)}$ とすると g も D で正則で

$$(2.2) \quad |g(z_0)| \geq |g(z)|, \quad \forall z \in D$$

である。最大値の原理 (定理 1.6) より g は D の定数関数であり、 f も定数関数になり h も D 上で定数 $c = h(z_0)$ になる。一致の定理 (定理 2.4) より Ω で $h \equiv h(z_0)$ である。

(2) h は有界閉集合 $\overline{\Omega}$ で連続なので、連続関数についての最大値原理からある点 $z_0 \in \overline{\Omega}$ で h は最大となる。すなわち $h(z_0) \geq h(z)$ ($\forall z \in \overline{\Omega}$) である。もし、 $z_0 \in \partial\Omega$ なら $h(z_0) \leq 0$ なので $h(z) \leq h(z_0) \leq 0$ で OK である。もし $z_0 \in \Omega$ なら (1) よりこの場合も h は非正である。

問題 2.6 (1) (2.2) が成り立つ理由および, D 上で g が定数なら f も定数になることを示せ.
 (2) $z_0 \in \Omega$ のときも $h \leq 0$ となる理由を説明せよ.

問題 2.7 Ω を有界とする. 調和関数 h が $\bar{\Omega}$ で連続とし, $h = 0$ が境界 $\partial\Omega$ で成り立てば, Ω において $h \equiv 0$ となることを示せ.

定理 2.6 (調和関数の一様収束極限) $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ は領域 Ω 上の調和関数の列とする. h_n が Ω 上の関数 h に広義一様収束すれば h も Ω で調和である.

[証明] $\overline{D(X_0, r)} \subset \Omega$ とする. h_n は調和なので (2.1) から

$$h_n(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta$$

が成り立つ. h_n は h に一様収束するので, 極限と積分の順序交換ができて, h に対しても (2.1) を得る. 定理 2.3 の後半の主張から h は調和関数である.

§3. 調和関数の逆平均値の定理

まず定理 2.3 の拡張として次が成り立つ.

定理 3.1 h は $D(0, R)$ で調和かつ可積分とする. このとき次が成り立つ:

$$(3.1) \quad h(0, 0) = \frac{1}{|D(0, R)|} \iint_{D(0, R)} h(x, y) dx dy.$$

[証明] 定理 2.3 より $0 < r < R$ について $h(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$ が成り立つことに注意して, 重積分を極座標変換すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{|D(0, R)|} \iint_{D(0, R)} h(x, y) dx dy &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R h(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \frac{2}{R^2} \int_0^R \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right) r dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R h(0, 0) r dr = h(0, 0). \end{aligned}$$

問題 3.1 上の証明において h の可積分性の条件をどこで用いているか?

この結果の逆に相当する次の事実の証明が本節の目標である. この問題はかなり古くから論じられていたと思われるが, ここでは Kuran によるエレガントな証明 ([7]) を紹介する.

定理 3.2 Ω を $\mathbf{R}^2$ の面積有限な開集合で原点 $O = (0, 0)$ を含むとする. Ω 上のすべての可積分な調和関数 h に対して

$$(3.2) \quad h(0, 0) = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} h(x, y) dx dy$$

が成り立てば Ω は原点中心の円板である.

[証明] Ω に含まれる原点 O を中心とする開円板で半径が最大のものを B で表す. その半径を r とし, $|OA| = r$ となる点 $A = (a, b) \in \partial\Omega$ を選ぶ. $\Omega = B$ であることを示せば十分である. このために, 次の Ω 上の関数 $h(x, y)$ を考える:

$$(3.3) \quad h(x, y) := \frac{x^2 + y^2 - r^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2} + 1, \quad (x, y) \in \Omega.$$

このとき、次がわかる：

$$(3.4) \quad h(0,0) = 0, \quad h(x,y) \geq 1, \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus B$$

$$(3.5) \quad h \text{ は } \Omega \text{ で調和であり、かつ可積分である.}$$

さて、条件 (3.2) より

$$0 = |\Omega| h(0,0) = \iint_{\Omega} h(x,y) dx dy = \iint_B h(x,y) dx dy + \iint_{\Omega \setminus B} h(x,y) dx dy.$$

一方、調和関数 h の平均値の性質 (3.1) より

$$\frac{1}{|B|} \iint_B h(x,y) dx dy = h(0,0) = 0$$

である。これらから $\iint_{\Omega \setminus B} h(x,y) dx dy = 0$ を得る。さらに、(3.4) より $\Omega \setminus B$ 上で $h \geq 1$ であったから

$$0 = \iint_{\Omega \setminus B} h(x,y) dx dy \geq \iint_{\Omega \setminus B} 1 dx dy = |\Omega \setminus B| \geq |\Omega \setminus \overline{B}|$$

より $\Omega \setminus \overline{B} = \emptyset$ がわかる。よって $B \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset \overline{B} = B$ となり、結局 $\Omega = B$ が示される。

問題 3.2 (3.5) の 2 つの事実を確認せよ。

問題 3.3 上の証明の最後の部分である $\Omega \setminus \overline{B} = \emptyset$ および $\Omega = B$ となる理由を説明せよ。

§4. 単位円板におけるディリクレ問題

Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域とし、 f を $\partial\Omega$ 上の (実数値) 連続関数とする。 $\overline{\Omega}$ 上の連続関数 h で

$$(4.1) \quad h \text{ は } \Omega \text{ で調和で、かつ } \lim_{X \rightarrow Y} h(X) = f(Y) \quad (\forall Y \in \partial\Omega)$$

を満たすものを、 f に対する Ω での**ディリクレ問題**の解と言う。

定理 4.1 Ω が有界ならば、ディリクレ問題の解は存在すれば一意である。

問題 4.1 h_1, h_2 をともに f に対するディリクレ問題の解とし、 $h := h_1 - h_2$ とする。調和関数の最大値の原理 (定理 2.5 (2)) を使って $h \equiv 0$ を示せ (これは定理 4.1 の証明)。

ディリクレ問題は解がない場合もあるが (後の問題 4.6)、 Ω が単位円板なら解を具体的に表すできる。そのためにポアソン核とポアソン積分を導入する。次の関数 $P(z, \zeta)$ を (単位円板の) **ポワソン核**と呼ぶ：

$$(4.2) \quad P(z, \zeta) := \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad (|z| < 1, |\zeta| = 1).$$

また、単位円周 $\partial D(0, 1)$ 上の連続関数 f に対して、

$$(4.3) \quad P[f](z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta \quad (z \in D(0, 1))$$

を f の**ポアソン積分**と言う。ポアソン核は次の性質を持つ：

補題 4.1 (1) $z = re^{it}$, $\zeta = e^{i\theta}$ のとき $P(z, \zeta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} > 0$.

$$(2) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-in\theta} \text{ より } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta = 1.$$

$$(3) \delta > \delta' > 0 \text{ のとき } |\zeta - \zeta_0| \geq \delta \text{ かつ } |z - \zeta_0| < \delta' \text{ ならば } P(z, \zeta) \leq \frac{2\delta'}{(\delta - \delta')^2}.$$

問題 4.2 上記の (1), (2), (3) を確かめよ.

定理 4.2 (単位円板におけるディリクレ問題) 単位円板ではポアソン積分がディリクレ問題の解を与える. すなわち, $h(z) = P[f](z)$ とすると, h は $D(0, 1)$ で調和になり次を満たす:

$$(4.4) \quad \lim_{z \rightarrow \zeta_0} h(z) = f(\zeta_0) \quad (\forall \zeta_0 \in \partial D(0, 1)).$$

[証明] $F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} f(e^{i\theta}) d\theta$ と定めると F は $D(0, 1)$ で正則で $\operatorname{Re} F(z) = P[f](z)$ である. よって $h = P[f]$ は調和関数である. (4.4) を示そう. $\zeta = e^{i\theta}$, $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$ とすると

$$(4.5) \quad P[f](z) - f(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) (f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})) d\theta$$

である. f は $\zeta = \zeta_0$ で連続なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ ならば $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| < \varepsilon$ となる. これより

$$(4.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|e^{i\theta} - \zeta_0| < \delta} P(z, e^{i\theta}) |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_{|e^{i\theta} - \zeta_0| < \delta} P(z, e^{i\theta}) \cdot \varepsilon d\theta \leq \varepsilon$$

となる. また, f は有界なので $|f(\zeta)| \leq M$ とすると, $|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| \leq |f(e^{i\theta})| + |f(e^{i\theta_0})| \leq 2M$ であり, $\delta' > 0$ を $2\delta'/(\delta - \delta')^2 < \varepsilon$ が成り立つように小さく取れば, 補題 4.1 (3) から $|\zeta - \zeta_0| \geq \delta$ かつ $|z - \zeta_0| < \delta'$ ならば, $P(z, \zeta) < \varepsilon$ なので

$$(4.7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|e^{i\theta} - \zeta_0| \geq \delta} P(z, e^{i\theta}) |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|e^{i\theta} - \zeta_0| \geq \delta} \varepsilon \cdot 2M d\theta < 2M\varepsilon$$

が成り立つ. 以上より $|z - \zeta_0| < \delta'$ ならば $|P[f](z) - f(\zeta_0)| < \varepsilon(1 + 2M)$ となり (4.4) が示される.

問題 4.3 (1) F が正則関数であることを示せ. さらに $\operatorname{Re} F(z) = P[f](z)$ を確認せよ.

(2) 補題 4.1 (1), (2) から (4.5) が成り立つことを確認せよ.

問題 4.4 $\phi(z) = rz + z_0$ とする. f が円周 $\partial D(z_0, r)$ 上の連続関数のとき $f(\phi(z))$ は単位円周 $|z| = 1$ 上の連続関数である. この事実から $D(z_0, r)$ におけるディリクレ問題の解を与えよ.

問題 4.5 以下の方針に従って定理 2.3 の後半の主張に証明を与えよ. h はすべての円板で (2.1) を満たす Ω 上の連続関数とし, $D = D(\alpha, r)$ を $\bar{D} \subset \Omega$ を満たす円板とする. 境界関数 $f := h|_{\partial D}$ に対する D でのディリクレ問題の解を $P_D[f]$ とし, D 上の関数 $\tilde{h}(z) := h(z) - P_D[f](z)$ を考える.

(1) $\tilde{h}$ について, 閉包が D に含まれる任意の円板において (2.1) が成り立つ. その理由を述べよ.

(2) $\tilde{h} \not\equiv 0$ ならば $\tilde{h}$ は $\bar{D}$ 内で正の最大値または負の最小値を取ることを説明せよ.

(3) $\beta \in D$ で $\tilde{h}(\beta) > 0$ が最大値とし, $\bar{D}(\beta, t) \subset D$ とする. $\tilde{h}$ と $D(\beta, s)$ ($0 < \forall s < t$) に (2.1) を使うことにより $D(\beta, t)$ 上で $\tilde{h} \equiv h(\beta)$ を示せ.

(4) (3) から矛盾を導き $\tilde{h} \equiv 0$ を示せ. これから h は Ω で調和になることを示せ.

問題 4.6 $\Omega = \{0 < |z| < 1\}$ (穴あき円板) とし, $\partial\Omega$ 上の連続関数として $f(e^{i\theta}) \equiv 0$, $f(0) = 1$ を考える. f に対するディリクレ問題の解 h が存在したとして, 以下に従って矛盾を導け.

(1) $z = re^{i\theta}$ としたとき h は θ によらずに r のみの関数であること, すなわち $h(z) = h(|z|)$ を示せ.

(2) $h''(r) + (1/r)h'(r) = 0$ となることを示して, $h(r)$ の一般解を求めよ.

(3) (2) の一般解で $h(1) = 0$, $h(0) = 1$ を満たすものは存在しないことを示せ.

§5. 楕円領域におけるディリクレ問題

§4 より, 単位円板ではディリクレ問題は常に解を持つことがわかった. ここでは楕円領域

$$(5.1) \quad \Omega := \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$$

に対して, 境界値 f が多項式なら, 解 h も多項式として求まることを調べる. 以下

$$(5.2) \quad \beta = \beta(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

とする. Ω の境界で $\beta = 0$ である. さらに,

$\mathcal{P} :=$ 変数 x と y の多項式全体, $\mathcal{P}_m := m$ 次以下の x と y の多項式全体

とする. 次の定理が成り立つ.

定理 5.1 m を自然数とする. 任意の $p \in \mathcal{P}_m$ に対して

$$(5.3) \quad \Delta h = 0 \quad (\Omega \text{ の上で}) \quad \text{かつ} \quad h = p \quad (\partial\Omega \text{ の上で})$$

を満たす $h \in \mathcal{P}_m$ が唯一つ存在する.

証明のために任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$(5.4) \quad L(p) := \Delta(p\beta)$$

と定める. 次の事実が基本的である:

補題 5.1 (Fischer の補題) L は $\mathcal{P}_m$ からそれ自身への全射である. すなわち, 任意の $q \in \mathcal{P}_m$ に対して $g \in \mathcal{P}_m$ で $L(g) = q$ を満たすものがある.

[証明] $p \in \mathcal{P}_m$ なら $p\beta \in \mathcal{P}_{m+2}$ なので $L(p) \in \mathcal{P}_m$ である. また $L(c_1p + c_2q) = c_1L(p) + c_2L(q)$ より線形である. L が単射であることを示す. L は線形なので $L(p) = 0$ なら $p = 0$ を示せばよい. $u := p\beta$ とすると, $\Delta u = L(p) = 0$ かつ境界 $\partial\Omega$ 上で $u = 0$ である ($\beta = 0$ だから). よって u は境界値 0 に対するディリクレ問題の解である. 解の一意性から $u = 0$ よって $p = 0$ である. 下記の問題 5.1 より L は全射にもなる.

問題 5.1 V を有限次元線形空間とし, $T: V \rightarrow V$ を線形写像とする. このとき次元公式 $\dim V = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T))$ が成り立つ. このことから T が単射なら T は全射になることを確認せよ.

[定理 5.1 の証明] (i) $\deg(p) \leq 1$ なら $h = p$ とすればよい.

(ii) $\deg(p) \geq 2$ とする. このとき $m \geq 2$ である. $q := -\Delta p \in \mathcal{P}_{m-2}$ とすると, 補題 5.1 より $L(g) = q$ となる $g \in \mathcal{P}_{m-2}$ が存在する. $h = p + g\beta$ とすればよい.

問題 5.2 上記の h は (5.3) を満たすことを確認せよ.

問題 5.3 $p, q \in \mathcal{P}$ とする. (5.1) の楕円領域 Ω 上で $\Delta u = q$, 境界 $\partial\Omega$ 上で $u = p$ を満たす $u \in \mathcal{P}$ が唯一つ存在すること示せ ($q = \Delta(v\beta)$ なる v および (5.3) を満たす h について $u = h + v\beta$ としてみよ).

実は楕円領域では本来のディリクレ問題の解も存在する. $\partial\Omega$ 上の連続関数 f に対して

$$(5.5) \quad h \text{ は } \Omega \text{ で調和で, かつ } \lim_{X \rightarrow Y} h(X) = f(Y) \quad (\forall Y \in \partial\Omega)$$

を満たす $\bar{\Omega}$ 上の連続関数 h の存在を示す 2 つの方法 [I], [II] の概略を記す.

[I](等角写像の利用) 領域 Ω の境界が 1 つのジョルダン閉曲線 C のとき, すなわち, $\Omega = (C)$ となるとき Ω はジョルダン領域と呼ばれる. 例えば楕円領域はジョルダン領域である. 次の事実が成り立つ:

定理 5.2 Ω はジョルダン領域とする. $\bar{\Omega}$ から閉単位円板 $\overline{D(0,1)}$ の上への連続関数 F で次を満たすものが存在する.

- (1) F は Ω 上の等角写像 (1 対 1 の正則関数) である.
- (2) F は境界 $\partial\Omega$ を単位円周に 1 対 1 に写し, $\zeta(\theta) := F^{-1}(e^{i\theta})$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) はジョルダン閉曲線 $\partial\Omega$ の媒介変数表示を与える.
- (3) (5.5) を満たす h は次で与えられる: $z = x + iy \in \Omega$ のとき

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(F(z), e^{i\theta}) f(F^{-1}(e^{i\theta})) d\theta.$$

F の存在がリーマンの写像定理であり, (2) の主張がカラテオドリの境界対応定理である. これらを認めれば (3) の証明は難しくはないがここでは省略する.

[II](定理 5.1 の利用) $\Omega = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1\}$ は (5.1) の楕円領域とし, f を $\partial\Omega$ 上の連続関数とする. さらに $\alpha(x, y) := \sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}$ として, 次を定める: $\tilde{f}(0, 0) = 0$ かつ

$$\tilde{f}(x, y) := \alpha(x, y) f\left(\frac{x}{\alpha(x, y)}, \frac{y}{\alpha(x, y)}\right), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

問題 5.4 上記の $\tilde{f}$ は $\mathbf{R}^2$ 上の連続関数であることを確認せよ.

定理 5.3 $\bar{\Omega}$ を含む長方形 R を 1 つ取る. ワイエルシュトラスの多項式近似定理より, 多項式列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ で

$$|\tilde{f}(x, y) - p_n(x, y)| \leq \frac{1}{n} \quad (\forall (x, y) \in R)$$

を満たすものが存在する. 多項式 p_n に対する定理 5.1 の解を h_n とする. このとき $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ は $\bar{\Omega}$ 上で一様収束する. この収束先 h が (5.5) の解を与える.

問題 5.5 (1) 多項式列 p_n は $\partial\Omega$ 上で f に一様収束することを確認せよ.

(2) 調和関数の最大値の原理をから, $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ は $\bar{\Omega}$ で一様収束するコーシー列になることを示せ.

(3) (2) の収束先を h とする. 定理 2.6 を使って h が (5.5) を満たすことを確認せよ.

§6. ディリクレ原理による解法

定理 5.1 のディリクレ原理を使った別証を考える. まず, 記号を再確認する: $\mathcal{P}_m := m$ 次以下の x, y の多項式全体,

$$\Omega := \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\} \text{ (楕円領域)}, \quad \beta(x, y) := 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

さらに, 以下の積分を考える:

$$D(u, v) := \iint_{\Omega} \{u_x(x, y)v_x(x, y) + u_y(x, y)v_y(x, y)\} dx dy$$

$$I(u) := D(u, u) = \iint_{\Omega} \{u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2\} dx dy$$

$$B(u, v) := \iint_{\Omega} u(x, y)v(x, y)\beta(x, y) dx dy.$$

$I(u)$ は u の**ディリクレ積分** (あるいは**エネルギー積分**) と呼ばれる.

補題 6.1 $m \geq 2$ として $V := \{q\beta; q \in \mathcal{P}_{m-2}\}$ とする.

(1) V は $\mathcal{P}_m$ の線形部分空間であり, $\langle u, v \rangle := D(u, v)$ は V の内積になる³.

(2) $\langle q, w \rangle := B(q, w)$ は線形空間 $\mathcal{P}_{m-2}$ の内積になる.

(3) $p \in \mathcal{P}_m$ とする. $D(p, v) = -D(u_0, v)$ ($\forall v \in V$) を満たす $u_0 \in V$ が存在する⁴.

[証明] (1), (2) は正值性の後半以外の条件は容易に確認できる. (3) は V の正規直交基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を一つ取り, $u_0 := -\{D(p, e_1)e_1 + D(p, e_2)e_2 + \dots + D(p, e_n)e_n\}$ とすればよい.

問題 6.1 (1) $u \in V$, $D(u, u) = 0$ なら $u = 0$, および, $q \in \mathcal{P}_{m-2}$, $B(q, q) = 0$ なら $q = 0$ を確認せよ.
(2) 上記の u_0 が (3) を満たすことを確認せよ.

ディリクレ原理とはディリクレ積分の値 $I(p + v)$ を最小にする関数 v によって解を求める方法である.

定理 6.1 $m \geq 2$, $p \in \mathcal{P}_m$ とし, $V := \{q\beta; q \in \mathcal{P}_{m-2}\}$ とする.

(1) 補題 6.1 (3) の u_0 は $I(p + v) \geq I(p + u_0)$ ($\forall v \in V$) を満たす.

(2) $h := p + u_0$ は調和関数になり (5.3) を満たす (定理 5.1 の解を与える).

[証明] (1) 補題 6.1 (3) より $I(p + v) = I(p) + 2D(p, v) + I(v) = I(p) - 2D(u_0, v) + I(v)$ であり $D(p, u_0) = -I(u_0)$ なので

$$(6.1) \quad I(p + v) - I(p + u_0) = I(u_0 - v) \geq 0$$

(2) $h = p + u_0$ とする. $\forall t \in \mathbf{R}$ と $\forall v \in V$ について $u_0 + tv \in V$ なので, (6.1) より

$$(6.2) \quad 0 \leq I(p + u_0 + tv) - I(p + u_0) = I(h + tv) - I(h) = 2tD(h, v) + t^2I(v)$$

となり, t の任意性から $D(h, v) = 0$ が成り立つ. また, 境界 $\partial\Omega$ 上で $v = 0$ なので, グリーンの公式

$$(6.3) \quad \iint_{\Omega} \Delta h \cdot v \, dx dy + \iint_{\Omega} \{h_x v_x + h_y v_y\} dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n} v d\sigma$$

より, $v = \beta q$ として

$$(6.4) \quad \iint_{\Omega} \Delta h \cdot v \, dx dy = B(\Delta h, q) = 0 \quad (\forall q \in \mathcal{P}_{m-2})$$

となる. これより h は Ω 上の調和関数である. さらに $\partial\Omega$ 上では $u_0 = 0$ なので, 境界では $h = p$ が成り立ち (5.3) が成り立つ.

問題 6.2 (1) (6.1) を確かめよ. (2) (6.2) から $D(h, v) = 0$ を導け.

(3) (6.3) から (6.4) を導け. (4) 補題 6.1 (2) に注意して (6.4) より $\Delta h \equiv 0$ を導け.

³内積とは (1) 線形性: $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$, (2) 対称性: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, (3) 正值性: $\langle u, u \rangle \geq 0$ および $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ を満たすことである.

⁴内積から定まるノルムに関して完備な線形空間がヒルベルト空間である. ヒルベルト空間上の任意の有界線形汎関数は内積で表現される (リースの表現定理). 有限次元なので, V の完備性や $v \mapsto D(p, v)$ の有界性は自動的に成り立つ.

一般のディリクレ問題についてもディリクレ原理を適用してみよう． Ω は有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ 上の連続関数 f に対して，次を考える：

$$(6.5) \quad \mathcal{F} := \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}); u = f \text{ } (\partial\Omega \text{ の上で})\}$$

定理 6.2 $\mathcal{F}$ の関数の中でディリクレ積分の値を最小とするものがディリクレ問題の解を与える．すなわち， $h \in \mathcal{F}$ が

$$(6.6) \quad \inf_{u \in \mathcal{F}} I(u) \geq I(h)$$

を満たせば h は Ω で調和になり， $h = f$ が $\partial\Omega$ で成り立つ．

この定理によって，すべての有界領域でディリクレ問題は解を持つと思われていた．しかしこの定理には欠陥があった．定理は (6.6) を満たす h が存在すれば正しい．しかし，実際は $\mathcal{F}$ が空でないことや (6.6) の左辺が有限になることも不明であり，最も深刻な問題は (6.6) の下限は最小値を持つことがまったく自明でないことである．これはワイエルシュトラスの指摘であった⁵．

§7. 上半平面におけるディリクレ問題について

$H := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$ を上半平面とする． H 上のディリクレ問題とは境界 $\partial H = \{(x, 0); x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ 上に連続関数 f を与えたとき

$$(7.1) \quad \Delta h = 0 \text{ } (H \text{ 内で}), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} h(x,y) = f(x_0) \text{ } (\forall x_0 \in \mathbf{R})$$

を満たす H 上の連続関数 h を求めることである．まず，次の一次分数変換 (単に一次変換とも言う) を考える：

$$(7.2) \quad T(z) := \frac{z-i}{z+i}.$$

⁵ まだまだメジャーとは言えなかったディリクレ問題を一躍有名にしたのは“名付け親”リーマン (1826-1866) と“精密の権化”ワイエルシュトラス (1815-1897) である．リーマンは (2次元の) ディリクレ原理を使って彼のリーマン面上のアーベル関数についての壮大な理論を打ち立てる．正則関数の実部と虚部が調和関数になる事実から，正則関数の理論は調和関数の研究に有用であるが，リーマンは，逆に，調和関数の理論を正則関数の研究に用いることによって，単連結領域が単位円板と等角同値になるという有名な写像定理などを得るのである．

ディリクレ原理ではエネルギーを最少にする関数の存在を (物理的考察から) 自明なものとしていた．この点にワイエルシュトラスが非難を浴びせたのは 1870 年である．彼は「下限と最小値は同じでない」ことを強調した．例えば $\mathcal{F} = \{f \in C[0,1]; f(0) = 0, f(1) = 1\}$ に対して

$$I(f) := \int_0^1 f(x)^2 dx,$$

を考える． $\inf_{f \in \mathcal{F}} I(f) = 0$ であるが， $I(f) = 0$ となる f は $\mathcal{F}$ の中に存在しない．この指摘はガウスの研究にも当てはまる．当時の研究姿勢は物理の問題と直結しており，解の存在証明よりも，具体的な解の表示を求めることを目標としていたという事情もあったのかもしれない．しかしながら，ディリクレ原理の推論に問題点があることは疑いようもなく，その方法に頼ったリーマンの結果にも影を落とすのである．

一旦は闇に葬られたかと思われたリーマンの研究は，ディリクレ原理を使わない証明によって復活する．それはシュヴァルツ (1843-1921) の“交代法”，C. ノイマン (1832-1925) による“算術平均法”，そしてポアンカレ (1854-1912) の“掃散法”である．

(途中略) 1900 年にヒルベルト (1862-1943) は「この原理の魅惑的簡明さと豊富な応用例の可能性は，その中に真実が含まれていることを確信する」という信念で，ディリクレ原理自身を復活させることに成功する．彼の方法は“直接法”と呼ばれ， Ω と f の適当な条件の下で， $D(v_n)$ が下限に収束する列 $\{v_n\}$ の中から， $\mathcal{F}_f$ の元に収束する部分列を見出すものである．現代的に言えば「コンパクト集合上の下半連続関数は最小値をもつ」ことであり，コンパクト性は「一様有界かつ同程度連続な関数列は収束する部分列を含む」というアスコリ・アルツェラの定理の考えが基本となっている．この考えは関数空間の完備性の萌芽であって，ヒルベルト空間の理論へと発展する．

(ディリクレ問題の発展の歴史 (数学セミナー 2005 年 11 月号に掲載) から抜粋，

ホームページ <http://ccmath.meijo-u.ac.jp/~suzukin/> の著書・書評欄を参照せよ)

問題 7.1 上記の $w = T(z)$ について以下を確かめよ：

- (1) T は H を円板 $D(0, 1) = \{|w| < 1\}$ に写す.
- (2) T は $\partial H = \mathbf{R}$ を円周 $\{|w| = 1\}$ に写す.
- (3) $z = T^{-1}(w)$ は $D(0, 1)$ を H に写す.

H はジョルダン領域ではないので定理 5.3 は成り立たないが, T が F の役割の代用をすることによって, 以下が成り立つ.

定理 7.1 f を $\mathbf{R}$ 上の有界な連続関数とする. 次の h は (7.1) を満たす：

$$(7.3) \quad h(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt$$

問題 7.2 定理 7.1 を証明せよ.

問題 7.3 $h(x, y) = y$ は境界値 0 の (7.1) の解であることを確認して, H ではディリクレ問題の解の一意性は成り立たないことを説明せよ.

定理 7.1 は f が非有界で (7.3) の右辺の積分が発散する場合には解を与えない. 例えば $f(x) = x^2$ のとき, (7.3) の右辺は発散するが $h(x, y) = x^2 - y^2$ は (7.1) の解である.

この節の目標は f が次の形の有理式の場合に (7.1) の解を一つ与えることである：

$$(7.4) \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

ここで P と Q は実係数の多項式で, Q は実軸に零点を持たず, さらに $\mathbf{C}$ で重解を持たないと仮定する. $Q(x) = 0$ の解を

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}$$

とする. ただし $\text{Im}(\alpha_j) > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) とする. 複素数の範囲での部分分数展開をして次を得る： $\{a_j\}_{j=1}^n, \{b_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{C}$ が存在して,

$$(7.5) \quad \frac{1}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{x - \alpha_j} + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{x - \overline{\alpha_j}}.$$

問題 7.4 (7.5) において $b_j = \overline{a_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ を示せ.

定理 7.2 f が (7.4) の形のとき, B_1 と B_2 を次で定める.

$$B_1(z) := P(z) \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{z - \alpha_j}, \quad B_2(z) := P(z) \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{z - \overline{\alpha_j}}.$$

このとき, (7.1) を満たす (一つの) 解は $h(x, y) := 2\text{Re}(B_1(z))$ で与えられる.

[証明] B_1 は H で正則なので h は調和である. また, 実数 x について $\overline{B_1(x)} = B_2(x)$ が成り立つので, $f(x) = B_1(x) + B_2(x) = 2\text{Re}(B_1(x))$ となり (7.1) が満たされる.

問題 7.5 定理 7.2 を使って, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ についての (7.1) の解を一つ求めよ.

§8. ラドン変換の非一意性

ラドン変換の一意性の問題とは次の問である： f を $\mathbf{R}^2$ 上の連続関数とする．すべての直線上での f の積分の値が 0，すなわち，

$$(8.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(at+b, ct+d)dt = 0$$

がすべての $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ で成り立てば， $f \equiv 0$ であるか？

この問題についての研究も古くからある (cf. [9]). まず一意性が成り立つ場合の話から始めよう． f が可積分，すなわち， $\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x, y)| dx dy < \infty$ ならば問の答えは “YES” である．

[証明] $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を任意に取る． $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{p^2+q^2} \end{pmatrix}$ に写す回転を P として， $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変数変換を行う． $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば， $x = au + bv$ ， $y = cu + dv$ である． f のフーリエ変換 $\tilde{f}$ を考える．直交変換 P によって内積が変わらないこと，すなわち，

$$px + qy = \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(P \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{p^2+q^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = v\sqrt{p^2+q^2}$$

および $dx dy = |\det(P^{-1})| du dv$ ， $|\det(P^{-1})| = 1$ に注意すれば

$$\tilde{f}(p, q) := \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy = \iint_{\mathbf{R}^2} f(au + bv, cu + dv) e^{-iv\sqrt{p^2+q^2}} du dv$$

である．最後の式を

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(au + bv, cu + dv) e^{-iv\sqrt{p^2+q^2}} du dv = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\sqrt{p^2+q^2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(au + bv, cu + dv) du \right) dv$$

と見れば，右辺の $(\cdot)$ の中は f の直線上の積分であるから 0 で，結局 $\tilde{f}(p, q) = 0$ を得る．フーリエ変換が恒等的に 0 となる可積分な連続関数は 0 しかない⁶．

可積分の条件を落とすと一意性が成り立つとは限らない． $\mathbf{R}^2$ 上の調和関数 h で，すべての直線上で (8.1) を満たすが， $h \not\equiv 0$ となるものが存在することを示す．

ラドン変換は CT (コンピューター断層撮影) の基礎になったものである ([10])．一意性が成り立たないと，CT には写らない “腫瘍” が存在してしまう !?

まず，次の補題を確認する：

補題 8.1 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ が $|z_1 - z_2| < 1$ を満たすとする． $\mathbf{C} \setminus \{z_1\}$ で正則な関数 f と任意の $\varepsilon > 0$ に対して， $\mathbf{C} \setminus \{z_2\}$ で正則な関数 g で次を満たすものが存在する：

$$(8.2) \quad |f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{(1 + |z|)^2} \quad (|z - z_2| > 1).$$

[証明] $|z_1 - z_2| = r$ とする． f は $r < |z - z_2| < \infty$ で正則であるから， z_2 を中心とするローラン展開を行うと

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_2)^n + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{-j}}{(z - z_2)^j}$$

⁶例えば，伊藤清三著，ルベグ積分 (裳華房) の P.223 を見よ．

となる (定理 1.7). $f_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_2)^n$ は $\mathbf{C}$ で正則である. また, 主要部である $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{-j}}{(z-z_2)^j}$ は $|z-z_2| \geq 1 > r$ なる z について絶対一様収束していることに注意する. これより m を十分大きく取れば

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{|a_{-j}|}{|z-z_2|^j} < \frac{\varepsilon}{4(|z_2|+1)^2}$$

が $|z-z_2| \geq 1$ を満たす z について成り立つ. 特に $|z-z_2| = 1$ として

$$\sum_{j=m}^{\infty} |a_{-j}| < \frac{\varepsilon}{4(|z_2|+1)^2}$$

である. さらに, $m \geq 2$ ならば

$$1 + |z| \leq 1 + |z-z_2| + |z_2| \leq 2(|z_2|+1)|z-z_2|^{m/2}, \quad (|z-z_2| \geq 1)$$

なので

$$(8.3) \quad g(z) := f_0(z) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_{-j}}{(z-z_2)^j}$$

で定めた関数 g は求める関数である.

問題 8.1 (8.3) の g が補題の条件 (8.2) を満たしていることを確認せよ.

[非一意性の証明] 放物線 $P := \{t + it^2 \in \mathbf{C}; t \geq 0\}$ 上の点列 $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ を次を満たすように選ぶ:

$$\zeta_0 = 0, \quad |\zeta_k - \zeta_{k-1}| < 1 \quad (k \geq 1), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = \infty$$

$g_0(z) = z^{-2}$ とする. 補題 8.1 を繰り返し使うと次の関数列 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ が定まる:

$$(8.4) \quad g_k \text{ は } \mathbf{C} \setminus \{\zeta_k\} \text{ で正則, } |g_k(z) - g_{k-1}(z)| < \frac{1}{2^k(1+|z|)^2} \quad (|z - \zeta_k| > 1)$$

このとき g_k は $\mathbf{C}$ で広義一様収束している. 極限の関数を g とすれば g は $\mathbf{C}$ で正則である (定理 1.8).

$P_r := \{z \in \mathbf{C}; \inf_{w \in P} |z-w| > r\}$ と置く. $z \in P_1$ ならば, (8.4) より

$$(8.5) \quad |g(z) - g_0(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(z) - g_{k-1}(z)| < \frac{1}{(1+|z|)^2} < |g_0(z)|$$

となり, これは $g \neq 0$ を意味する. さらに

$$(8.6) \quad |g(z)| < (1+|z|)^{-2} + |g_0(z)| < \frac{2}{|z|^2} \quad (z \in P_1)$$

より, (1.4) を使うと,

$$(8.7) \quad |g'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=1} \frac{g(\xi)}{(z-\xi)^2} d\xi \right| < \frac{2}{(|z|-1)^2} \quad (z \in P_2)$$

を得る ($|z-\xi|=1$, $|g(\xi)| = 2|\xi|^{-2} < 2(|z|-1)^{-2}$ に注意せよ). $f(z) := g'(z)$ とすると, f は $\mathbf{C}$ で正則であり, かつ $\mathbf{C}$ 内の任意の直線 ℓ に対して

$$(8.8) \quad \ell \setminus P_2 \text{ は有界集合である.}$$

よって ℓ を $\{(at+b, ct+d); t \in \mathbf{R}\}$ と表わせば, (8.7) より $\int_{-\infty}^{\infty} |f(at+b, ct+d)| dt < \infty$ であり, さらに (8.6) より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(at+b, ct+d) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n g'(at+b, ct+d) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a+ci} [g(an+b, cn+d) - g(-an+b, -cn+d)] = 0 \end{aligned}$$

となる⁷. 求める調和関数 h としては f の実部を取ればよい.

問題 8.2 (8.4) で定めた $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\mathbf{C}$ で広義一様収束していることを確認せよ.

§9. 半平面の調和関数による特徴付け

$\mathbf{C}$ 内の空でない集合 A と $z \in \mathbf{C}$ に対して $\text{dist}(z, A) := \inf\{|z-w|; w \in A\}$ と定め, 領域 $\Omega (\neq \mathbf{C})$ に対して

$$(9.1) \quad \delta_{\Omega}(z) := \text{dist}(z, \mathbf{C} \setminus \Omega)$$

とする. δ_{Ω} は $\mathbf{C}$ で連続であり, $\mathbf{C} \setminus \Omega$ で 0 になる. 次がこの節の主定理である⁸.

定理 9.1 δ_{Ω} が Ω で調和関数となる必要かつ十分条件は Ω が半平面になることである.

[**必要性の証明**] 半平面とは $\mathbf{C}$ 内の直線の上側 (または下側) の領域である. 平行移動と回転を行うことにより右半平面 $H_0 := \{(x, y); x > 0\}$ にできる. $\delta_{H_0}(x, y) = x$ から δ_{H_0} は調和関数である. H_0 から Ω への平行移動と回転により δ_{H_0} は δ_{Ω} に写るので δ_{Ω} も調和になる (定理 2.2).

十分性の証明のために補題を用意する:

補題 9.1 中心 $T_c = (c, 0)$, 半径 $R > 0$ の円板 $D(T_c, R)$ で h は調和とする. $c-R < a < b < c+R$ のとき $A := \{x \in [a, b]; h(x, 0) = 0\}$ とする. A が無限集合なら $A = [a, b]$ である.

[**証明**] B を A の集積点全体とする⁹. A は無限集合なので B は空集合ではなく, $B \subset A \subset [a, b]$ である. h の連続性から B が閉集合になる. B が $[a, b]$ の開集合になることを示せば $[a, b]$ の連結性から $B = [a, b]$ となり $A = [a, b]$ がわかる. $x_0 \in B$ とする. $r > 0$ が存在して $h(x, 0)$ は (x_0-r, x_0+r) 上で x_0 を中心としたべき級数で表され, 無限個の零点を持つので恒等的に零になる. すなわち $(x_0-r, x_0+r) \subset B$ となり B は $[a, b]$ の開集合である.

問題 9.1 $B \subset A$ および B が閉集合になることを確認せよ.

問題 9.2 (1) $X_0 = (x_0, 0)$, $r > 0$ を $\overline{D(X_0, r)} \subset D(T_c, R)$ に取る. f を $D(X_0, r)$ で正則で $\text{Re} f = h$ とする. f のべき級数展開を用いて $h(x, 0)$ が (x_0-r, x_0+r) でべき級数に書けることを示せ.

(2) $h(x, 0)$ が (x_0-r, x_0+r) に無限個の零点をもてば, そこで恒等的に零になることを示せ.

[**十分性の証明**] まず, 任意の $z \in \Omega$ に対して $\delta_{\Omega}(z) > 0$ かつ

$$(9.2) \quad D(z, \delta_{\Omega}(z)) \subset \Omega$$

であることを注意する. $z_0 \in \Omega$ を一つ取り固定し, $\beta_0 \in \partial\Omega$ を $\delta_{\Omega}(z_0) = |z_0 - \beta_0|$ に取る. 回転と平行移動をすることにより $\beta_0 = 0$, $z_0 = x_0 > 0$ としてよい. $x \in [0, x_0]$ のとき $\delta_{\Omega}(x) = x$ である (x と

⁷正則関数 g に対して $\int_{z_1}^{z_2} g'(z) dz = g(z_2) - g(z_1)$ である.

⁸実は, 「 δ_{Ω} が Ω で劣調和関数になる必要かつ十分条件は $\mathbf{C} \setminus \Omega$ が凸集合になること」が成り立つ.

⁹ $x \in B$ とは $\{a_n\} \subset A$ で $x \neq a_n$ かつ $a_n \rightarrow x$ となること.

$(x, 0)$ を同一視している). $\delta_\Omega(x_0) = x_0$ なので (9.2) より $D(x_0, x_0) = D(x_0, \delta_\Omega(x_0)) \subset \Omega$ である. 次に, 定理の条件である δ_Ω の調和性から

$$h(z) := \operatorname{Re}(z) - \delta_\Omega(z)$$

は Ω で調和になり, (9.2) より 十分小さい $\varepsilon > 0$ を取って, $c = x_0, R = x_0, a = \varepsilon, b = 2x_0 - \varepsilon$ として補題 9.1 を使うと, $[a, b]$ 上で h は零になる. $\varepsilon > 0$ の任意性から $[0, 2x_0]$ 上で $h(x) = 0$ がわかる. 特に $0 = h(2x_0) = 2x_0 - \delta_\Omega(2x_0)$ より $D(2x_0, 2x_0) = D(2x_0, \delta_\Omega(2x_0)) \subset \Omega$ である. この議論を繰り返すと, すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\delta_\Omega(2^n x_0) = 2^n x_0 \quad \text{かつ} \quad D(2^n x_0, 2^n x_0) \subset \Omega$$

となり, 結局は

$$(9.3) \quad H_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} D(2^n x_0, 2^n x_0)$$

とすると H_0 は右半平面で, $H_0 \subset \Omega$ を満たす. よって 任意の $z \in H_0$ に対して

$$(9.4) \quad h(z) = \operatorname{dist}(z, \mathbf{C} \setminus H_0) - \operatorname{dist}(z, \mathbf{C} \setminus \Omega) \leq 0$$

となる. H_0 上の調和関数 h は非正值でかつ内点 x_0 で極大値 0 を取っているため, 最大値の原理 (定理 2.5) から H_0 全体で 0 である. 連続性から $\overline{H_0}$ 上でも $\delta_\Omega(z) = \operatorname{Re}(z)$ が成り立つので, 虚軸 ∂H_0 上で δ_Ω は 0 である. Ω 上では δ_Ω は正なので, $\Omega \cap \partial H_0 = \emptyset$ を意味する. 連結性から Ω は右半平面になる.

問題 9.3 (9.3) の H_0 は右半平面 $\{(x, y); x > 0\}$ に一致することを確認せよ.

問題 9.4 (9.4) を確認せよ.

問題 9.5 $\Omega \cap \partial H_0 = \emptyset$ なら $\Omega = H_0$ となることを説明せよ.

参考文献

- [1] D.H.Armitage, A non-constant continuous function on the plane whose integral on every line is zero, Amer. Math. Monthly, 101 (1994), 892-894.
- [2] D.H.Armitage and S.J.Gardiner, Classical potential theory, Springer Monographs in Mathematics (2001), Springer.
- [3] J.A.Baker, The Dirichlet problem for ellipsoids, Amer. Math. Monthly, 106 (1999), 829-834.
- [4] R.B.Burckel, Three secrets about harmonic functions, Amer. Math. Monthly, 104 (1997), 52-56.
- [5] F.J. Flanigan, Some half plane Dirichlet problems: The bare hands approach, Amer. Math. Monthly, 80 (1973), 59-61.
- [6] S.J.Gardiner, The Dirichlet problem with non-compact boundary, Math. Zeit. 213 (1993), 163-170.
- [7] Ü.Kuran, On the mean-value property of harmonic functions, Bull. London Math. Soc. 4 (1972), 311-312.
- [8] T.Ransford, Potential theory in the complex plane, London Mathematical Society Student Texts 28 (1995), Cambridge Univ. Press.
- [9] L.Zalcman, Uniqueness and nonuniqueness for the Radon transform, Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 241-245.
- [10] 金子 晃, コンピューター・トモグラフィーの歴史 (数学者は何故ノーベル賞を取り損ねたのか?), 20 世紀の数学, 1998 年, 日本評論社, p.72-94.
- [11] 鈴木紀明, [数学基礎] 複素関数, 2001 年, 培風館.

[付録 1] 複素数の効用

「自然数を作り出したのは神で、その他はすべては人間の手の仕業だ」は数学者クロネッカー (1823-1891) の言葉であるが、自然数に始まって、整数、実数、複素数という数の世界の広がりには必ずしもスムーズでは無かったようである。これらの拡大は、負数、無理数、そして虚数を付け加えることによってなされたわけであるが、新しい数の呼び名がすべて否定的用語 (負 (negative), 無理 (irrational), 虚 (imaginary)) であったことからその導入への反発・抵抗がうかがい知れる。

さて、複素数の歴史を振り返ってみよう¹⁰。私達が複素数に初めて出会うのは、2次方程式の解の公式においてであろう。 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられるので、 $x^2 + 1 = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{-4}/2 = \pm\sqrt{-1}$ となるが、実際には、この解のために $\sqrt{-1}$ が考えられたのでは無い。虚数の概念の発生はルネッサンスの頃であるが、当時の人々にとって $x^2 + 1 = 0$ はむしろ解なしとして扱われ、それ以上の考察はなかった。歴史的には3次方程式の解法において始めて虚数を考える必要性が生じた。1545年に、カルダノ (1501-1576) は3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解の公式として

$$x = -\frac{b}{3a} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \omega^2 \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

($p := c/a - b^2/3a^2$, $q := d/a - bc/3a^2 + 2b^3/27a^3$, $\omega = 1, (-1 \pm \sqrt{-3})/2$) を得る¹¹。これに従えば、例えば $x^3 - 15x - 4 = 0$ の解は

$$\omega \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \omega^2 \sqrt[3]{-2 + 11\sqrt{-1}}$$

となる。一方、 $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$ より $x = 4$ は明らかに解なので、上のどれかと一致するはずである。実際に $4 = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-2 + 11\sqrt{-1}}$ が成り立つが¹²、このように実数の解も虚数を使って表される事実直面して、虚数を取り扱うことの必要性が生

¹⁰本稿は拙著 [数学基礎] 複素関数、培風館 (2001) の0章の一部を加筆修正したものである。

¹¹3次方程式の解法については、 $x^3 + px + q = 0$ の形の方程式の解法を最初に得たのはタルタリア (1500?-1557) で、カルダノはその公式を騙し取ったとも伝えられている。いずれにせよカルダノは“相当の”人物であつたらしい。森毅著の異説数学者列伝 (蒼樹書房) によれば、「16世紀イタリアで、最大の医術者、最大の自然哲学者、最大の数学者、最大の錬金術師、最大の占星術師、最大の手相術師、最大の魔術師、そして最大の賭博師といわれたのは、カルダノであつた」。

$x^3 + px + q = 0$ の解法の概略を示す。解 α が一つ見つければ、因数定理から $(x - \alpha) \times (2次式) = 0$ となり残りの解もわかる。解法のアイディアは恒等式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ の利用である。 $-3yz = p$, $y^3 + z^3 = q$ とすれば左辺は $x^3 + px + q$ となり、 $x = -y - z$ が一つの解である。 $y = -p/(3z)$ を $q = y^3 + z^3$ に代入して $z^6 - qz^3 - (p/3)^3 = 0$ となり、 $z^3 = t$ とすれば $t^2 - qt - (p/3)^3 = 0$ は2次式で、 $t = q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}$ が解より $z = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$ である。 $y^3 = q - z^3 = q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}$ から $y = \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$ となり $x = -y - z = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} - \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$ が一つの解である。

¹² $(2 + i)^3 = 2 + 11i$, $(-2 + i)^3 = -2 + 11i$ なので $\sqrt[3]{2 + 11i} - \sqrt[3]{-2 + 11i} = (2 + i) - (-2 + i) = 4$ 。

じたのである¹³。虚数に対する不可解さが続く一方で¹⁴，その有用性については疑いないものになっていった。

1748年にオイラー(1707-1783)は $i = \sqrt{-1}$ の記号を使って¹⁵，“魔術的な公式”¹⁶

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を示した。この公式を使えば，一見神秘的なド・モアブル(1667-1754)の公式

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

も $(e^{ix})^n = e^{inx}$ と説明でき，さらに

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib} \iff \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{cases}$$

となって，指数関数の指数法則と三角関数の加法定理が結びつく¹⁷。しかしながら，オイラーでさえも $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(-4)} = \sqrt{4} = 2$ のような間違いをしていて，虚数の正確な基礎付けは18世紀末のガウス(1777-1855)の登場まで待たねばならなかった。

1799年にガウスは複素数を平面上の点と解釈して，その幾何学的理論を展開させ，次の代数学の基本定理の証明に成功する¹⁸：

「 n 次方程式は複素数の範囲で必ず解を持つ」

この定理の意味するところは深い。 $i = \sqrt{-1}$ を加えた複素数を考えることによって，実数の範囲では解をもたない $x^2 = -1$ が解けるようになるだけでなく，複素数の範囲ではすべての次数の n 次方程式が解ける。これ以上“新しい数”を付け加える必要はないのである¹⁹。この意味で，複素数はより重要なものになり，さらには数学において不可欠のものとなった。

ハミルトン(1805-1865)は1835年，実数の組 (a, b) に対して和と積を

$$\begin{cases} (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) \end{cases}$$

¹³4次方程式の解の公式はカルダノの弟子フェラーリが発見した。

¹⁴負の数の対数におけるライプニッツ(1646-1716)とベルヌーイ(1667-1748)の論争も今日から見れば滑稽でさえある。ベルヌーイは $\log(-x) = (\log(-x)^2)/2 = (\log x^2)/2 = \log x$ から， $\log(-x)$ は実数であると信じていた。一方，ライプニッツは不可解ながらも $\log(-1)$ は虚数であると主張した。

¹⁵オイラーが始めて $\sqrt{-1}$ を i と表したが，実際には一度しか使っていないらしい。ガウスが i を使うようになってから広まった。ちなみに，電気分野では i は電流を表すので j が使われる。

¹⁶物理学者のファインマンは「数学における最も素晴らしい公式で，これは我々の至宝である」と記している(ファインマン物理学 I 力学(坪井忠二訳)，岩波書店(1965年))。ここで e は自然定数の底で

$$e = 2.718\cdots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

です。なお， x は実軸からの角度ですが，単位はラジアンなので注意してください。オイラーの公式で $x = \pi$ とすると $e^{i\pi} + 1 = 0$ となります。この等式は数学において最も重要な数 $0, 1, \pi, i, e$ で構成されていて大変興味深いものです。数学を，解析，幾何，代数に分けたとすると， e は解析学， π は幾何学， i は代数学の代表である。

¹⁷数学者アダマール(1865-1963)は“The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex plane(実数における二つの事実を結ぶ最短路は複素数の中を通過している)”と言っている。

¹⁸アーベル(1802-1829)は5次方程式に解の公式がないことを証明した。これはガウスの結果とは矛盾しない。ガウスは解が常に存在することを主張したのに対して，アーベルは5次以上では解は4則演算とべき根($\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\cdots$)で書き表せない(代数的には解けない)ことを示したのである。実際，楕円関数を使えば，解を具体的に記述することができる。

¹⁹ $x^4 = -1$ の解のためには $\sqrt{i}$ のような新しい数が必要に思えるかもしれないが，実際は $\sqrt{i} = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$ となりこれも複素数である。

で定義した²⁰。このとき $(1, 0) = 1$, $(0, 1) = i$ とすれば,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + bi$$

となって, 平面の点と複素数を同じものとみなすことができる²¹。さらに, 「複素数の四則演算は実数と同じように行い, i^2 が出たら -1 にする」という天下りの計算法も

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

となって正当化される。この考察は複素数が2次元的な数であることを示している。当然のことながら $n \geq 3$ に対して n 次元の点を “ n 次元的な数” と見なすことができないのかという疑問がおこるが, 結果は否である。 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して, 分配法則, 交換法則, 結合法則などの実数の持つ性質を満たすように和と “積” が定義できるのは $n = 2$ のみであることが証明される²²。いずれにしても, 複素数が互いに掛け算ができる事実が, 物理学などへの応用において極めて重要であったことは間違いなく²³。

最後に, 複素数の積の幾何学的意味について注意しておく。それは

「 i を掛けることは 90° の回転である」

ことである²⁴。すなわち $a + ib = (a, b)$ に対して

$$i(a + ib) = -b + ia = (-b, a)$$

はベクトル (a, b) を反時計まわりに 90° 回転して得られる。これから $i^2 = -1$ は 180° の回転となるので, 「 $(-1) \times (-x) = x$ は $-x$ を 180° の回転 (すなわち, 反転) をして x となる」と解釈できて, (負の数) $\times$ (負の数) = (正の数) を合理化する。

²⁰ 積の定義は一見不自然である (複素数との対応からは自然であるが)。しかし, この種のことを我々は既に経験している。分数の和と積について, 積 $(a/b)(c/d) = (ac/bd)$ はともかく, 和 $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/bd$ は奇妙に見える。

²¹ 和と積も対応していることに注意せよ:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) & \iff & (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, bc + ad) & \iff & (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad) \end{aligned}$$

²² より正確に言うとは, 「 $a = (a_1, \dots, a_n)$ の長さを $|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ で定めたとき, $|a \times b| = |a||b|$ が成り立つような積が定まるのは $n = 1, 2, 4, 8$ のみである」ことをフルヴィッツ (1859-1919) が示した。 $n = 4$ の場合がハミルトンの4元数, $n = 8$ はケイリー (1821-1895) の8元数と呼ばれる。ただし, 4元数では交換法則 $a \times b = b \times a$ が成り立たない。8元数では結合法則 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ も成り立つとは限らない。

²³ アインシュタインの相対性理論における4次元時空 (3次元空間と時間) の幾何学は, 時間座標を純虚数と解釈できる。また量子力学の基礎をなすシュレーディンガー方程式 $i\hbar \partial \Psi / \partial t = \hat{H} \Psi$ には虚数が含まれている ($\hbar$ はプランク定数, Ψ は波動関数, $\hat{H}$ はハミルトン演算子)。

²⁴ ガモフ (理論物理学者) は虚数を使う簡単な応用として次の「宝探し問題」を著書の中で紹介している (新版「1, 2, 3... 無限大」白楊社 (2004) p.49)。「船で北緯〇〇度, 西経〇〇度に進めば, 無人島を発見するだろう。島の北岸に横たわりさえぎるもののない広大な平原に, 1本のカシの木と1本の松の木が寂しく立っているのに気づくはずだ。裏切り者を絞め殺した1台の絞首台があるからそれを探せ。絞首台からカシの木に向かい歩数を数えつつ歩むように。カシの木に着いたら, 右へ90度向きを変え, さらに同歩進む。そこで大地に杭を打つ。再び絞首台から松の木に向かって歩数を数えつつ歩め。松の木に至って, 左に90度向きを変え, さらに同歩進む。そこで再び大地に杭を打て。杭と杭との中間を発掘せよ。宝が見つかるはずだ」実際にその地に行くと, カシの木と松の木はあったが, 絞首台は影も形もなかった。宝は見つけられるか?

(複素) 関数論は複素数についての微積分と言える。通常の実数値関数 $f(x)$ では、

$$(*) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在するとき、 f は微分可能で、この値を $f'(x)$ と書く。曲線 $y = f(x)$ の点 $x = a$ における接線の傾きが $f'(a)$ である。一方、積分である

$$\int_a^b f(x) dx$$

は $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積である。17 世紀後半に「接線の傾き」と「図形の面積」が互いに逆の演算であることをニュートン (1642-1727) とライプニッツ (1646-1716) は独立に見抜いた。これが微分積分学の始まりである。

一方、複素関数 $f(z)$ についても、

$$(**) \quad \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

が収束するとき、微分可能と言い、この値を $f'(z)$ と表す。 $(*)$ と $(**)$ は見た目以上に違うことを認識すべきである。実際、区間で微分可能な実数値関数の導関数 $f'(x)$ は連続でないことさえあるが、複素平面の領域で 1 回微分可能な複素関数 (正則関数) は、無限回微分可能となる。この違いは $h \rightarrow 0$ と $w \rightarrow 0$ の違いから生まれる²⁵。正則関数 $f(z)$ は何回でも微分可能であり、さらに、(単連結領域における) 閉曲線 C に沿っての積分の値は 0、すなわち、

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ。これがコーシー (1789-1857) の積分定理である。正則関数の基本性質はすべてこの定理から導かれる。例えば、先ほどの無限回微分可能性も、コーシーの積分定理から導かれるべき級数展開可能性によって示される。また「複素平面全体で正則で有界な関数は定数である」と言うリュービル (1809-1882) の定理も導かれ、この定理を用いるとガウスが苦労した「代数学の基本定理」の証明も非常に簡単明瞭になる。さらに、コーシーは実数値関数の積分値や級数の計算を目的とした留数定理を示すが、これも彼の積分定理の簡単な応用である。例えば、留数定理を使えば $0 < a < 1$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^ax}{1+e^x} dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

の値が $\pi/(\sin a\pi)$ および $1/(2a^2) + \pi/(2a \sinh a\pi)$ になることが比較的簡単にわかる²⁶。最後に素数定理に触れる。ガウスは 1792 年頃 (15 歳のとき) に「 n 番目の素数は大体 $n \log n$ である」と予想した²⁷。この主張はリーマンのゼータ関数による考察を経て、最終的には、1896 年にアダマールとドゥ・ラ・バレ・プーサンによって独立に証明される。特筆すべきことは、その証明に複素関数論 (留数定理) が使われたことである。

²⁵ 数直線の場合は $h \rightarrow 0$ は $h > 0$ から 0 に行くか、 $h < 0$ から 0 に行くかのどちらかであるが、複素平面では w が 0 に行く方法は非常に多様である。どのように w が 0 に近づいても同じ値に収束していることを課す $(**)$ は実は非常に強い条件なのである。

²⁶ 脚注 17 のアダマールの言葉を思い出せ。

²⁷ 同じことであるが x 以下にある素数の個数を $\pi(x)$ で表すと、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$ が成り立つ。

[付録 2] ディリクレ問題の歴史
(数学セミナー 2005 年 11 月号より抜粋)

久し振りにメンデルスゾーンのバイオリン協奏曲を聴いた。ディリクレの妻レベッカはこの作曲家の妹だそうである。

17 世紀後半のニュートンの万有引力の法則の発見以来、重力、静電気学、熱伝導、弾性理論などの多くの物理現象がラプラス作用素

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

に関する境界値問題として定式化された。これがポテンシャル論の始まりである。そこでは、特に、次の第 1 種境界値問題が重要となった。

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の有界領域を Ω 、その境界を ∂D とする。 ∂D 上の連続関数 f に対して、 Ω で C^2 級かつその閉包 $\bar{D}$ で連続な関数 h で次をみたすものを求めよ：

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta h(X) = 0, & \forall X \in D \\ h(Y) = f(Y), & \forall Y \in \partial D. \end{cases}$$

これが後にリーマンによって“ディリクレ問題”と命名されることになる本小論の主役である。 $\Delta u = 0$ の解は調和関数と呼ばれる。従って、要約すれば、ディリクレ問題とは「与えられた境界値を持つ調和関数を見つける」ことであり、例えば、境界 ∂D 上の温度分布 f がわかったときに、内部の点 $X \in D$ での温度 $h(X)$ を求めることである。

ディリクレ問題の波乱に富んだ歴史は様々な解法を生み出す。ガウスの変分法、ディリクレ原理、算術平均法、交代法、掃散法、直接法、内部近似法、PWB 法、そしてブラウン運動による表示などである。これらを萌芽として如何なる数学が育ったのかを少し詳しく見ていこう。

1. ディリクレ以前

以下では、 $n = 3$ の場合を記述していくが、若干の修正で一般の $n \geq 2$ でも同様の主張が成り立つことを注意しておく。

1825 年頃、ポアソン (1781-1840) は球 $\{|X| < r\}$ に対する (1) の解を、いわゆるポアソン積分

$$(2) \quad h(X) = \frac{1}{4\pi r} \iint_{\{|Y|=r\}} \frac{r^2 - |X|^2}{|X - Y|^3} f(Y) d\sigma(Y)$$

によって与えた (σ は球面 $\{|Y| = r\}$ の面積要素)。数年後、グリーン (1793-1841) は、上記の結果を一般化して、境界が十分に滑らかな Ω に対して、(1) の解を

$$h(X) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} f(Y) \frac{\partial G}{\partial n_Y}(X, Y) d\sigma(Y)$$

と表す。ここで、 $\partial/\partial n_Y$ は $Y \in \partial D$ での外法線微分、 σ は ∂D 上の面積要素であり、 G は各 $X \in D$ に対して $|X - \cdot|^{-1} - G(X, \cdot)$ は Ω で調和、かつ $G(X, \cdot)$ が境界でゼロとなる、後に、グリーン関数と呼ばれるものである。グリーンが物理的事実から自明と見なしたこの関数の存在は、リヤプノフ (1857-1918) が 1898 年に証明を与えた。

ガウス (1777-1855) は 1839 年に (単層) ポテンシャル

$$N\varphi_0(X) := \iint_{\partial D} \frac{\varphi_0(Y)}{|X - Y|} d\sigma(Y)$$

で、 ∂D で定数となるものを求めた。 f を ∂D 上の連続関数とする。 ∂D 上の非負関数で積分値が 1 である φ の中で

$$G(\varphi) := \iint_{\partial D} (N\varphi(Y) - 2f(Y))\varphi(Y)d\sigma(Y)$$

の値を最少にするものを φ_f とすると、 $N\varphi_f - f$ は境界上で定数 a_f となることをガウスは導く (このとき、 $N\varphi_f - a_f$ は (1) の解となる)。 彼の関心は $f = 0$ に対する解 φ_0 で、 $N\varphi_0$ は $\overline{D}$ で定数になり、平衡分布と呼ばれる。 また、 $1/a_0$ は Ω の容量 (capacity) である。 ガウスの証明は正確ではなかったが、その着想は近代ポテンシャル論における一つの源流となった。 厳密な証明のためには測度論と積分論の整備が必要で、およそ 1 世紀の後にフロストマン (1907-1977) によって再生する。

ディリクレ (1805-1859) は (1) の問題をエネルギー (ディリクレ積分) を最小にする関数で実現する。 すなわち、

$$(3) \quad D(h) = \inf_{v \in \mathcal{F}_f} D(v), \quad D(v) := \iiint_D |\nabla v(X)|^2 dX$$

をみたす関数 h が解であると主張した。 ここで $\mathcal{F}_f$ は許容関数全体、すなわち、

$$\mathcal{F}_f := \{v \in C(\overline{D}) \cap C^1(D); \partial D \text{ 上で } v = f\}$$

であり、 $C(\overline{D})$ は Ω の閉包で連続な関数全体、 $C^k(D)$ は Ω 上の C^k 級の関数全体を表す。

変分法は当時よく知られており、 $D(h)$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式が $\Delta h = 0$ であることも認識されていた。 ケルヴィン (1824-1907) ら他の数学者も同様の考察を得ていたが、ディリクレの講義からこの方法を学んだリーマンによって (3) は“ディリクレ原理”と名付けられる。 ディリクレは偉大な数学者で整数論などに多くの功績があるが、皮肉なことに、彼の名を冠するディリクレ問題に対する寄与はあまりない。

2. リーマンとワイエルシュトラス

まだまだメジャーとは言えなかったディリクレ問題を一躍有名にしたのは“名付け親”リーマン (1826-1866) と“精密の権化”ワイエルシュトラス (1815-1897) である。

リーマンは (2 次元の) ディリクレ原理を使って彼のリーマン面上のアーベル関数についての壮大な理論を打ち立てる。 正則関数の実部と虚部が調和関数になる事実から、正則関数の理論は調和関数の研究に有用であるが、リーマンは、逆に、調和関数の理論を正則関数の研究に用いることによって、単連結領域が単位円板と等角同値になるという有名な写像定理などを得るのである。

ディリクレ原理ではエネルギーを最少にする関数の存在を (物理的考察から) 自明なものとしていた。 この点にワイエルシュトラスが非難を浴びせたのは 1870 年である。 彼は「下限と最小値は同じでない」ことを強調した。 例えば $\mathcal{F} = \{f \in C[0, 1]; f(0) = 0, f(1) = 1\}$ に対して

$$I(f) := \int_0^1 f(x)^2 dx,$$

を考える。 $\inf_{f \in \mathcal{F}} I(f) = 0$ であるが、 $I(f) = 0$ となる f は $\mathcal{F}$ の中に存在しない。 この指摘はガウスの研究にも当てはまる。 当時の研究姿勢は物理の問題と直結しており、解の存在証明よりも、具体的な解の表示を求めることを目標としていたという事情もあったのかもしれない。

しかしながら、ディリクレ原理の推論に問題点があることは疑いようもなく、その方法に頼ったリーマンの結果にも影を落とすのである。

一旦は闇に葬られたかと思われたリーマンの研究は、ディリクレ原理を使わない証明によって復活する。それはシュヴァルツ (1843-1921) の“交代法”，C. ノイマン (1832-1925) による“算術平均法”，そしてポアンカレ (1854-1912) の“掃散法”である。

すべての $f \in C(\partial D)$ に対して (1) が解をもつとき、 Ω を (ディリクレ) 正則領域と呼び、そのときの解 h を h_f^D と書くことにする。(2) より球は正則領域である。1870 年にシュヴァルツは (2 次元の) 領域 D_1, D_2 がともに正則なら、その和集合 $D_1 \cup D_2$ も正則であることを、二つの領域での解を互いに“交代させる”ことによって示した。すなわち、 $f \in C(\partial(D_1 \cup D_2))$ に対して ∂D_1 で f が連続関数になるように $D_2 \cap \partial D_1$ での値を適当に定めて $h_1 := h_f^{D_1}$ とする。さらに交互に、

$$h_{2n} := h_{v_n}^{D_2}, \quad h_{2n+1} := h_{w_n}^{D_1}$$

を作る。ただし、 v_n は $(\partial D_2) \setminus D_1$ 上で f 、 $D_1 \cap \partial D_2$ 上で h_{2n-1} であり、 w_n は $(\partial D_1) \setminus D_2$ 上で f 、 $D_2 \cap \partial D_1$ 上で h_{2n} である。この時、 $\{h_{2n-1}\}$ と $\{h_{2n}\}$ はともに収束し、その極限が $D_1 \cup D_2$ 上の解を与えるのである。また、彼は単位円の内部から多角形の内部への等角写像 (シュヴァルツ・クリストフェルの変換) を与え、それは多角形が正則領域であることを導く。

1878 年に、C. ノイマンは、磁気学で用いられていた 2 重層ポテンシャル

$$Wg(X) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\partial D} g(Y) \frac{\partial}{\partial n_Y} \frac{1}{|X - Y|} d\sigma(Y)$$

を使って (1) の解を求めることを試みた。このとき

$$\lim_{X \in D, X \rightarrow Y} Wg(X) = -g(Y) + Wg(Y) \quad (Y \in \partial D)$$

に注意する。 $K^0 f := f$ として、各 $n \geq 1$ に対して

$$K^n f(Y) := -\frac{1}{2\pi} \iint_{\partial D} K^{n-1} f(Z) \frac{\partial}{\partial n_Z} \frac{1}{|Y - Z|} d\sigma(Z)$$

($Y \in \partial D$) と定める。ノイマンは Ω が凸領域ならば、“算術平均” $K^n f$ が $n \rightarrow \infty$ のとき定数 c に収束する事実を発見し、(1) の解を

$$c + \sum_{n=1}^{\infty} (W(K^{2n-1} f) - W(K^{2n} f))$$

の形で与えた。実は Wg が (1) の解となるのは、 g が積分方程式 $-g + Kg = f$ をみたすことで、これはフレドホルム (1866-1927) の理論の出発点となった。

1887 年にポアンカレは最大値の原理と球が正則領域であることのみに基づく、新しいディリクレ問題の解法を発表する。これを説明するために劣 (優) 調和関数の概念を確認しよう。 Ω 上の下半連続関数 u は $\bar{B} \subset D$ なる任意の球 B に対して

$$(4) \quad u(X_0) \geq \frac{1}{|B|} \iiint_B u(X) dX$$

(X_0 は B の中心で、 $|B|$ はその体積) が成り立つとき優調和関数という。 $-s$ が優調和のとき、 s を劣調和関数という。優調和かつ劣調和な関数、すなわち、連続で平均値の性質 ((4) で等号)

をみたす関数は調和関数である。 s が C^2 級で $\Delta s \geq 0$ ならば劣調和である。非定数の劣調和関数は内点で最大値をとらない (最大値の原理)。

ポアンカレの方法に戻る。任意の $f \in C(\partial D)$ をとる。多項式近似定理を使い、それを劣調和な多項式の差で表すことにすれば、 f が劣調和な多項式 s の場合を考えれば十分である。球 B 上での s の値をそのポワソン積分 h_s^B に置き換えたものを s_B とする。 s_B は Ω で劣調和で、さらに最大値の原理から $s \leq s_B$ が成り立つ。この操作は B 上の質量 Δs を B の外に“掃き散らす”ことで、掃散法と命名される。

さて、閉包が Ω に含まれる球の列 $\{B_n\}$ で Ω を覆い、それを

$$B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, B_2, B_3, B_4, B_1, B_2, \dots$$

と同じものが無限回表れるようにして並べる。この順に掃散を繰り返行くと、 $s_{B_1}, (s_{B_1})_{B_2}, ((s_{B_1})_{B_2})_{B_1}, \dots$ は単調増加列で、ある調和関数 h に収束する。さらにポアンカレは Ω が外部円錐条件 (境界の各点で領域の外部に含まれるような円錐がとれる) をみたせば

$$\lim_{X \rightarrow Y} h(X) = s(Y), \quad (\forall Y \in \partial D)$$

が成り立つことを示した。これより、特に、滑らかな有界領域はすべて正則である。この掃散というポアンカレの簡明で優れたアイディアは近代ポテンシャル論に計り知れない影響を与えることになる。

ワイエルシュトラスの警鐘がディリクレ問題に対する再考察をうながし、そこからいくつかの新たな数学概念が生まれたのである。

3. ディリクレ原理の復活

1900 年にヒルベルト (1862-1943) は「この原理の魅惑的簡明さと豊富な応用例の可能性は、その中に真実が含まれていることを確信する」という信念で、ディリクレ原理自身を復活させることに成功する。彼の方法は“直接法”と呼ばれ、 Ω と f の適当な条件の下で、 $D(v_n)$ が下限に収束する列 $\{v_n\}$ の中から、 $\mathcal{F}_f$ の元に収束する部分列を見い出すものである。現代的に言えば「コンパクト集合上の下半連続関数は最小値をもつ」ことであり、コンパクト性は「一様有界かつ同程度連続な関数列は収束する部分列を含む」というアスコリ・アルツェラの定理の考えが基本となっている。この考えは関数空間の完備性の萌芽であって、ヒルベルト空間の理論へと発展する。

ヒルベルトの貢献は、単にディリクレ原理の復活というだけではなく、より一般の偏微分方程式の境界値問題の解法における変分原理の重要性を指摘したことである。1900 年にパリで開かれた国際数学会議でヒルベルトは 23 の問題を提示する有名な講演を行う。その中の 20 番目の問題は「ある境界条件についてのある種の仮定がみたされ、必要があれば、解の概念が適切に拡張されるならば、すべての正則な変分問題は解をもつであろう」である。実際、超関数の概念やソボレフ空間などの関数解析学の整備に伴い、ヒルベルトの思想は着々と実現していくのである。

変分法によるディリクレ問題の解法を現代流に述べると次のようになる。 Ω を任意の有界領域とする。 f がソボレフ空間 $H^{1,2}(D)$ に属するとき

$$D(h) = \inf \{D(v); v \in H^{1,2}(D), v - f \in H_0^{1,2}(D)\}$$

をみたす $h \in H^{1,2}(D)$ が存在して,

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta h = 0 & (\text{超関数の意味で}) \\ h - f \in H_0^{1,2}(D). \end{cases}$$

20 世紀初頭までは, ディリクレ原理とディリクレ問題は同値と思われていたが, そうではないことをアダマール (1865-1963) が 1906 年に指摘する. 単位円周上の連続関数 $f(e^{it}) := \sum_{n=1}^{\infty} (\sin nt)/n^2$ はポアソン積分によって (1) の解 h をもつ. 一方, この h をフーリエ級数表示して計算すると, すべての許容関数 $v \in \mathcal{F}_f$ に対して $D(v) \geq D(h) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n!/n^4 = \infty$ となり, $\inf_{v \in \mathcal{F}_f} D(v)$ が最小値になることはない.

アダマールの例は (5) の事実とは矛盾しない. (5) が (1) を意味している訳ではないからである. (5) では $h = f$ の意味を $h - f \in H_0^2(D)$ と “解の概念を適切に拡張” しているのである.

4. 一般化されたディリクレ問題

ディリクレ原理では解けないディリクレ問題が存在したが, それでも, 当時はディリクレ問題自身は常に解をもつ, すなわち, すべての有界領域は正則であると考えられていた.

1909 年にザレンバ (1863-1942) は孤立点を境界にもつ領域, 例えば, 球から中心を除いた領域は正則でないことを指摘した. さらに 1912 年にルベーク (1875-1941) は, ルベークの棘 (とげ) と呼ばれる (境界が孤立点を含まない) 非正則な領域の例を与えると同時に, ディリクレ問題を二段階に分けて考えることを提唱する.

(i) f に対して一意的に定まる調和関数 H_f^D を決める. ただし, f が (1) の解を持てば $H_f^D = h_f^D$ をみたすものである.

(ii) $\lim_{X \rightarrow Y \in \partial D} H_f^D(X) = f(Y)$ は成り立つか?

(i) を一般化されたディリクレ問題という. また, 境界点 Y はすべての $f \in C(\partial D)$ に対して (ii) が成り立つとき (ディリクレ) 正則点と呼ばれる.

(i) の意味の解はすべての有界領域 Ω に存在することを, 具体的に H_f^D を構成する三つの方法で説明しよう.

ウィーナー (1894-1964) は 1924 年に “内部近似法” を考え出す. $\{D_n\}$ を Ω の正則近似列とする. すなわち, $\overline{D_n} \subset D_{n+1} \subset D$ および $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ をみたす正則領域の増大列とする (滑らかな領域は正則であるからこのような近似列は常に存在する). $\overline{D}$ の連続関数で境界で f と一致するものを F とすると

$$(6) \quad H_f^D(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_{F|_{D_n}}^{D_n}(X) \quad (\forall X \in D)$$

は F の取り方や $\{D_n\}$ の取り方には依存せずに決まり (i) をみたす.

(一般化された) ディリクレ問題の解を与える最も簡明で初等的な方法は次の “PWB 法” (単に “ペロンの方法” と呼ばれる) である. この手法は熱方程式を含むより一般の偏微分方程式の解の構成に適用でき, 最近では粘性解 (viscosity solution) の存在定理にも使われている.

1923 年にペロン (1880-1975) は次の事実を示す. f を ∂D 上の (必ずしも連続ではない) 関数とする. $\mathcal{U}_f$ を Ω 上の優調和関数 u で $\liminf_{X \rightarrow Y} u(X) \geq f(Y)$ をみたすもの全体とする. さらに $\mathcal{S}_f := \{-u; u \in \mathcal{U}_f\}$ として,

$$\overline{H}_f^D(X) := \inf_{u \in \mathcal{U}_f} u(X), \quad \underline{H}_f^D(X) := \sup_{s \in \mathcal{S}_f} s(X)$$

と定めると、これらはともに Ω 上の調和関数になり、

$$(7) \quad \underline{H}_f^D \leq \overline{H}_f^D$$

をみたとす。翌年、ウィーナーは f が連続ならば (7) は等号となり、この共通の関数が (6) に等しいこと示した。1939 年にブルロー (1903-1987) は連続でない f についての (7) の等号成立条件を与えて PWB 法はより強力になった。

調和関数の持つ平均値の性質がブラウン運動する粒子はすべての方向に同じ確率で動く事実と対応して、両者の関係は 1930 年頃から注目され出す。 $\{B_t, P_X\}$ をブラウン運動とする。境界までの到達時刻 $\tau_D(\omega) := \inf\{t > 0; B_t(\omega) \in \partial D\}$ を使うと、一般化されたディリクレ問題の解は

$$H_f^D(X) := \int f(B_{\tau_D}(\omega)) dP_X(\omega)$$

と表示できる。確率論的解釈としては、例えば、 χ_E を部分集合 $E \subset \partial D$ の定義関数とすれば、 $H_{\chi_E}^D(X)$ は $X \in D$ から出発したブラウン粒子が $\partial D \setminus E$ に入る前に E に到着する確率を表している。この両者の関係は確率論的ポテンシャル論としてドゥーブ (1910-2004) らによって深化していく。

正則点の問題 (ii) には 1924 年にルベグが次の解答を与える。境界点为正則である必要かつ十分条件は、その点に柵関数 (barrier) と呼ばれる正值優調和関数が存在することである。また、同年、ウィーナーは容量を用いた定量的な判定法を示した。非正則点の集合は小さく、その容量は 0 (極集合) である。

以上をまとめると、任意の有界領域 Ω と境界上の任意の連続関数 f に対して Ω 上の調和関数 H_f^D で、すべての正則境界点 $Y \in \partial D$ で $\lim_{X \rightarrow Y} H_f^D(X) = f(Y)$ をみたすものが一意に存在する (一意性は最大値の原理による)。従って、 Ω の境界点がすべて正則ならば H_f^D は (1) の解を与えている。

5. 近代ポテンシャル論

1940 年代後半からの 20 年間に、ポテンシャル論研究は二つの大きな流れをもって、フランスとドイツを中心に花開く。一つはこれまでの研究対象であるニュートン核 $|X|^{-1}$ を一般の関数核に拡張して、より広い視野から、最大値の原理、容量、平衡分布の存在などの本質を追求するものである。特に $0 < \alpha \leq 1$ に対する $(-\Delta)^\alpha$ の素解である リース核 $|X|^{2\alpha-3}$ についての研究は詳細になされた。

もう一つの流れは公理論化である。古典的なポテンシャル論における三つの基本性質、“ディリクレ問題の可解性”、“最大値の原理”、“単調列の収束性”を公理として、局所コンパクト空間上の連続関数の作る線形層によって調和空間の概念が生まれる。この抽象化は、これまでの結果により深い洞察を与えるとともに、偏微分方程式とマルコフ過程を結ぶ橋となった。

これらの新しい進展に、ガウスの着想、ポアンカレの掃散そして PWB 法が重要な役割を演ずる。そして、確率論との関係がより深まる一方で、物理学との関連はほとんどなくなる。

この時代のポテンシャル論を BC 理論と呼ぶ人もいる。Bauer, Beurling, Boboc, Bony, Brelot, Cartan, Choquet, Constantinescu, Cornea らが研究の中心だったからである。BC 以外では D や J の寄与も大きい。Deny, Doob それと大津賀、岸、二宮らの日本人研究者である。

本論を書くにあたって主に参考にしたのは、A.F. Monna “Dirichlet’s principle” である。副題が「A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis」とスキャンダラスであるが、実際は著者の数学観が色濃く出た真面目な解説書である。また F. クライン “19 世紀の数学” (共

立出版) は当時の数学界の雰囲気を教えてくれる。冒頭の実事はこの本で知った。U. ボタチーニ “解析学の歴史”(現代数学社) にはディリクレ原理の歴史が付録に書かれている。ポテンシャル論の教科書としては、D.H. Armitage and S.J. Gardiner “Classical Potential Theory”(Springer, 2000) が最近出版された。C. Constantinesc and A. Cornea “Potential Theory on Harmonic Spaces”(Springer, 1972) は公理的ポテンシャル論の “バイブル”である。岸正倫 “ポテンシャル論”(森北出版, 1974), 二宮信幸 “ポテンシャル論”(共立出版, 1969) も特色がある。