書評: Classical Potential Theory

長らくポテンシャル論の標準的教科書は Helms [3] であった．しかし出版から 30 年以上を経ており，その後の理論発展も踏まえて本書が企画・執筆されたようである．Helms の本の入手が困難な状況もあり，今後は本書がポテンシャル論の基礎理論を学ぶための標準的な教科書としての地位を得ていくものと思われる．

本書の内容は Euclid 空間の Laplace 作用素に関するポテンシャル論である．イギリスのポテンシャル論研究者の伝統かもしれないが，著者たちの興味はあくまで調和関数であり，抽象化した調和空間や掃散空間あるいは確率論的ポテンシャル論などへ研究対象を広げる傾向のある仏・独の研究者とは趣を異にしている．それは本書に対してだけでなく，著者たちの研究姿勢でもある．その意味でも本書は文字どおり古典的であり，Helms の本と大きく異なる部分は少ないし，むしろより具体的であるとさえ言える．しかしその取り扱いには著者たちの個性と意気込みが強く感じられる．それらの特徴を中心に各章についてもう少し詳しく触れてみる．

第 1 章：調和関数．調和関数の基礎的性質である平均値の定理，Poisson 積分，Harnack の不等式，Kelvin 変換，実解析性などがコンパクトに述べられている．単位球上の Poisson 積分表示の証明には工夫がある．また，平均値の定理の逆，すなわち，すべての可積分な調和関数が体積平均の性質を満たす領域は球に限られるという結果の紹介が目新しい．これは U. Kuran によるエレガントな証明を含めて，基礎的文献で当然取り上げられるべき事実と思われるが，この本にしてようやくと言う感じである．なお，平均値の定理についての歴史は [7] が詳しい．

第 2 章：調和多項式．同次調和多項式の作る線形空間の正規直交基底とその次元について述べた後，球と円環領域上の調和関数の調和多項式による展開が示される．これらは正則関数に対するベキ級数展開と Laurent 展開に対応するよく知られた結果であるが，Runge の定理に対応した調和多項式による近似の話題にも触れている点は類書と異なる．著者たちの複素関数に対する知識は豊富で，この観点からの調和関数に対する独自の研究結果も本書の中に散見される．例えば，この章の中では 2.6 節や Exercise 2.18 である．数年前に著者たちが前後して来日したとき，私も顔を会わす機会を得た．Gardiner は clever な研究者という印象であった．講演の休憩時間に調和近似の応用の話題が出て，彼から聞いた Radon 変換の非一意性の例は興味深かったが，その記述が 2.6 節である．Gardiner の先生である Armitage の来日講演の話題のひとつは universal harmonic function で，これは Exercise 2.18 で触れられている．先の第 1 章を含めて，6 章までの各章末に 20 題ほどの Exercise があるがなかなか手強い．本文の内容理解のためのルーチンな問題は少なく，上記のような研究論文の中の結果を取り上げた問題が多い．Hint の挿入や 巻末の Historical Notes 欄に出典論文の情報が記されていたりして便宜は図られている．

第 3 章：劣調和関数．平均値の性質を満たす連続関数は調和関数である．この事実に基づいて劣調和関数は劣平均値の不等式を満たす上半連続な関数として定義される．連続関数だけでなく，上半連続関数まで拡げて考えたことが劣調和関数の理論を豊かにしているが，本書でもこのことは十分に意識して書かれている．劣調和関数と凸性に関する記述にも工夫が見られる．ところで，劣調和関数にマイナスをつけたものが優調和関数である．従って，劣調和関数を主体に書いても，優調和関数を前面にして書いても内容の違いはないと言えるが，この取り扱いの違いが著者の正則関数に対する興味の度合いを表しているようにも思える．ちなみに [3] には劣調和関数の章はない．一方，[8] での優調和関数という語の記述はほんの数カ所のみである．

第 4 章：ポテンシャル．Green 関数およびそれを用いたポテンシャルの性質，Riesz 分解定理な

どを説明したのち，単位球上の優調和関数の境界値に関する Littlewood の定理と Fatou の定理に触れている．この内容は 9 節でより詳しく扱われる．単位球の Green 関数では通常とは異なった形での表示も書かれている．また 3 章で示された最大値の原理などの例を見てもなるべく一般的でより強い形の結果の記述を意図していることが窺われる．著者たちは本書に研究者がポテンシャル論の論文を読んだり書いたりするときの基礎参考文献としての機能を持たせようとして，通常のテキストには載っていない多くの結果を提供している．

第 5 章：極集合と容量．優調和関数が $+\infty$ をとる集合は極集合と呼ばれ，ポテンシャル論における除外集合として重要である．Green 関数が存在する領域での Green 容量が掃散関数によって定義される．通常，容量と呼ばれものは Newton 容量 (3 次元以上) と対数容量 (2 次元) であるが，Newton 容量は Green 容量の特別な場合であり，対数容量は Green 容量の極限から定まる．極集合が (外) 容量零の集合として特徴付けられるという Cartan の定理，すべての解析集合が可容になるという Choquet の定理などが紹介され，最後の節では Hausdorff 測度と容量の関係が述べられている．ところで容量という概念の定義は必ずしも明確でない．多くの場合は単調非負値集合関数のうちで集合の単調列に関する連続性を仮定した Choquet 容量 を考えることが多いが，本書では上述の Green 容量のみを扱っている．応用上も重要な Riesz 容量や Bessel 容量などについては [6] が参考になる．

第 6 章：Dirichlet 問題．Perron-Wiener-Brelot 法による解法が述べられている．境界上の (有界) 連続関数が可解になり，それから調和測度が定まること，非正則点の集合は極集合であることなどの記述は他の本と同様である．境界点の正則性・非正則性に関しては，Poincaré の外部円錐条件や Lebesgue の刺の例がよく知られているが，これらを含むより一般の結果の紹介や Dirichlet 問題の解を用いた優調和関数の拡張定理の部分には著者たちの独自性が表れている．

残りの 3 つの章はポテンシャル論で重要な位相に関する記述である．6 章までと比べると抽象化が一歩進んだ内容で Exercise はなくなる．

第 7 章：細位相．この章は有界な非連続優調和関数の例から始まる．すべての $\mathbf{R}^n$ 上の優調和関数を連続にする最弱の位相が細位相である．この位相に関して $\mathbf{R}^n$ は Baire 空間になり，quasi-Lindelöf 性を持つことが紹介され，細位相と通常の Euclid 位相による極限値の関係が尖細性を用いて説明されるなど，細位相に関する記述はかなり詳しい．尖細性と Dirichlet 正則性の関係，容量を使った Wiener の判定法などもより一般の形で与えられている．7.9 節で触れている尖細性の調和近似への応用は著者たちの得意分野で，[5] はそのより詳細な報告である．

第 8 章：マルチン境界．1941 年に正値調和関数の積分表示を得るための Martin 境界が考えられて以来，それが Euclid 境界といつ一致するかは興味深い問題である．1970 年の Hunt-Wheeden [4] による Lipschitz 領域では両者が一致するという結果はひとつのエポック・メーキングであった．本書では Lipschitz 領域における境界 Harnack 原理を示し，これを使って [4] の結果の証明がなされる．帯状領域での Martin 境界も具体的に与えられている．なお，境界 Harnack 原理の重要性については [1] がよい解説である．

第 9 章：境界極限．まず Martin コンパクト化における Dirichlet 問題を議論して，Martin 境界の点の尖細性である極小尖細の概念が定義される．そしてこの極小細位相に関する Fatou-Naïm-Doob の極限定理の証明が本章の目標である．さらにこの極限定理が半径方向の極限値に関する Littlewood の定理や非接極限に関する Fatou の定理を特別な場合として含んでいることが記述されている．

巻末には Appendix と Historical Notes がある．Appendix では本文中で用いられる Radon-Nikodym の定理，Riesz の表現定理や Stone-Wierstrass の近似定理などの “less elementary tools” がまとめられている．証明の引用文献がきちんと示されていて便利である．Historical Notes は基礎概念の原典についての説明や Exercise に関連する文献情報である．引用文献は歴史的・記念碑的な要素を持つものが多く，この分野の最新情報は少ない．

最後に，比較的最近に出版された類書 Axler, Bourdon and Ramey [2] と Ransford [8] と比較して本書の特徴を述べる．[2] は調和関数についての記述が主で劣 (優) 調和関数についての情報は少ない．その意味ではポテンシャル論入門の本としては不満もあるが，Bergman 空間などの関数解析的色彩を特徴に持った読みやすい本でよく売れているようである．2001 年には 2 版が出ている．[8] は正則関数との関連に重点がおかれている．Harnack の不等式を用いた Picard の小定理の証明の紹介が象徴的である．その他でも Koebe の 1/4 定理や Riemann の写像定理などもポテンシャル論的手法で証明が与えられている．最後の節にあるいくつかの応用も大変興味深い．こちらはペーパーバック版が最近出た．評者は４年および大学院セミナーで両者を使用した経験があるが満足できるものであった．一方，本書はポテンシャル論の基礎事項を学ぶには大変よい本である．[3], [2], [8] より本格的であり，一年間のセミナー用としては難しいかもしれないが，非線形ポテンシャル論，確率論的ポテンシャル論，公理論的ポテンシャル論などより発展的なポテンシャル論を学ぶための準備には最適であろう．

参考文献

[1] 相川弘明, 複雑領域の Martin 境界と境界 Harnack 原理，数学，55, 1 (2003), 1-19.

[2] S.Axler, P.Bourdon and W.Ramey, Harmonic Function Theory, Springer, New York, 1992.

[3] L.L.Helms, Introduction to Potential Theory, Wiley, New York, 1969.

[4] R.A.Hunt and R.L.Wheeden, Positive harmonic functions on Lipschitz domains, Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 507-527.

[5] S.J.Gardiner, Harmonic Approximation, London Math. Soc. Lecture Note Series 221, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[6] Y.Mizuta, Potential Theory in Euclidean Spaces, Gakkotosyo, 1996.

[7] I.Netuka and J.Vesely, Mean value property and harmonic functions, Classical and Modern Potential Theory and Applications, K. GowriSankaran et al. (eds.), Kluwer, Dordrecht, 1994, 359-398.

[8] T.Ransford, Potential Theory in the Complex Plane, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.