数学の記号について

2010 年 4 月

数学の本質は自由です．その意味では数学の議論においてどのような記号や文字を使うかも自由です．しかしながら，伝統的にそれぞれの場面で使われる記号が決まっているものがあります．例えば ε や δ は小さい正数を表し，m, n は自然数を意味する場合が多いし，複素数は $z = x + iy$ と書かれ，実数全体は $\mathbb{R}$ を用いるなどです．これらの習慣を身につけることは，数学の理解の上でも重要なことです．それどころか，某先生によれば「どんな文字や記号を使うかで，その人の数学のレベルがわかる」そうです．本文が，これから始まる数学の講義の理解の手助けになればと願います．

$\boxed{\mathbf{1}}$ まず数学の用語から始めます．以下の言葉は講義によく出てきます．

●定義 (definition) Def と略記することがある)：

数学の概念の意味や内容を定めたもの．定義は約束ですから守らないといけません．新しい定義が出てきたら，複数の例を考えることを習慣にしましょう．

●定理 (theorem) Th と略記，　命題 (proposition) Prop と略記，
補題 (lemma) Lem と略記，系 (corollary) Cor と略記：

正しいことが確かめられた数学の主張で重要なものを定理と言います．少し軽めの主張が命題で，定理や命題を証明するために補助的に使われる主張を補題と呼びます．一般的には重要性からみると 定理 > 命題 > 補題 の順ですが,「ツォルンの補題」や「シュワルツの補題」などは重要な主張ですが習慣的に補題の名前が付いています．また，定理の結論から直ちに得られる主張を系と言います．なお,「命題」という語は論理的な主張として，否定命題とか逆命題などとしても使われるので注意して下さい．

●証明 (proof) を Pr，例 (example) を Ex と略記する場合もありますが，これらは Proposition や Exercise(練習問題) などの略と混同する恐れがあるので使わない方がよいでしょう．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次に等号と不等号について注意します．

●等号 $X = Y$

等号は数学でもっともよく使われる記号ですが，いくつかの使い方をします．

(1) X と Y が等しい
(2) 右辺の Y を X と表す．または X を Y と置く (定義する) の意味
(3) 方程式を表す

例えば，$\sin(\pi/2) = 1$ は (1) の意味であり，$f(x) = ax + b$ は (2) の用法です．(3) は $ax^2 + bx + c = 0$ を解く場合などです．

(2) の場合にはできるだけ等号ではなくて $X := Y$ と書くようにして下さい ($X \overset{\text{def}}{=} Y$ と丁寧に書く人もいます)．なお，左辺の Y を X 表すという意味で $Y =: X$ と書くこともあります．(1) の場合は等号の成り立つ理由 (証明) を確認しないといけません．

●不等号 $a \leq b$

これは $a < b$ または $a = b$ を表す記号です．高校までは $a \leqq b$ と書いていましたがこれと同じ意味です．大学ではなぜか等号を一本にすることが多いので注意して下さい．同様に $a \geqq b$ を $a \geq b$ と書きます．ところで解析学は「不等式の学問」とも呼ばれます．その意味は $a = b$ を証明するのに $a \leq b$ と $b \leq a$ を示して導くからです．一見するとかえって面倒なように思えますが，この考え方を身につけることは大学数学におけるひとつの課題です．なお，後述の集合の等号でも同様な考え方をします．

●恒等式 $f \equiv g$

関数 f と g が恒等的に等しいことを意味しますが，簡単に $f = g$ と書くこともあります．例えば，$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ と書くべきでしょうが，同じ意味で $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ と書くのです．ところで $f \equiv g$ の否定は $f \not\equiv g$ ですが，これが意味するのは「$f(x) \neq g(x)$ となる x が (少なくともひとつ) 存在する」であって「すべての x について $f(x) \neq g(x)$」ではないことに注意して下さい．なお，数学の勉強が進むと $\equiv$ の記号は別の意味 (〜を法として等しい) としても使われることに出会うでしょう．例えば $a \equiv b \bmod (2\pi)$ などです．

$\boxed{\mathbf{3}}$ この節では数についてまとめます．

● 自然数，整数，有理数，実数，複素数

$\mathbb{N}$:= 自然数全体からなる集合　(自然数は 1 以上の整数です)
$\mathbb{Z}$:= 整数全体からなる集合
$\mathbb{Q}$:= 有理数全体からなる集合
$\mathbb{R}$:= 実数全体からなる集合
$\mathbb{C}$:= 複素数全体からなる集合

$\mathbb{N}$ は natural number (自然数) の頭文字です．整数の英語は integer ですが，ドイツ語の Zahl (数) の頭文字が使われます．$\mathbb{R}$ は real number (実数)，$\mathbb{C}$ は complex number (複素数) の頭文字です．有理数は rational number ですが，この頭文字では実数の場合と同じなので quotient (商) の頭文字を使って $\mathbb{Q}$ と表すようです．これらの集合は $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ と太文字で書く場合もあります．

●複素数の実部と虚部

複素数 $z = x + iy$ の実部 x を $\mathrm{Re}(z)$，虚部 y を $\mathrm{Im}(z)$ と書きます．すなわち，

$$\mathrm{Re}(z) := x, \quad \mathrm{Im}(z) := y$$

です．Re と Im はそれぞれ real と imaginary の略です．なお，伝統的には $\Re(z)$, $\Im(z)$ なる書き方もあります．これらは “R” と “I” に対応するドイツ文字 (フラクトゥール) ですが，書き難いのでお勧めしません．

●数の和と積はギリシャ文字の Σ(シグマ) と Π(パイ) を使います．

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

無限個の和 (級数) や無限個の積 (無限乗積) の場合は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ および $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ となります．

●階乗と 2 項係数

自然数 n に対して n の階乗を $n! := n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ と定めます．なお $0! = 1$ と約束します．さらに $(n)!!$ は偶数と奇数の場合に分けて

$$\begin{cases} (2n)!! & := & 2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2 \\ (2n-1)!! & := & (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 \end{cases}$$

と定めます．なお，ここでも $0!! = 1$ とします．n 個から k 個を取り出す組み合わせの総数は

$${}_nC_k := \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

となりますが，これを 2 項係数と言います．α が実数で，k が自然数のとき，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

を一般 2 項係数と呼びます．α が自然数 n なら $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = {}_nC_k$ です．大学では 2 項係数も前者の記号で書くことが多くなります．早く慣れましょう．

$\boxed{4}$ 一般の集合に関する記号を整理します．

●集合を表す場合はたいてい大文字 A, B, X, Y などを用います．その要素 (元) は小文字 a, b, x, y などを使います．集合の書き方としては，

(1) 要素を書き並べる方法　$X := \{x_1, x_2, \cdots\}$

(2) 要素の条件を書く方法　$X := \{x; x$ は $\cdots$ をみたす $\}$

があります (後者ではセミコロン ; を縦棒 | に変えて $\{x|x$ は $\cdots$ をみたす $\}$ と書く人も多い)．例えば X を正の偶数全体としたとき，$X = \{2, 4, 6, \cdots\}$ は (1) の書き方であり $X = \{n; n = 2m$ で m は自然数 $\}$ は (2) の書き方です．

● $a \in A$ および $a \notin A$

$a \in A$ は a が集合 A に属する (a は A の要素 (元) である) ことを意味します．$A \ni a$ と書いても同じ意味です．$a \notin A$ は a は A の要素でないことを意味します．$A \not\ni a$ も同じ意味です．例えば $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$，$\mathbb{C} \ni \sqrt{-3}$ などと使います．また，

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}, \quad \mathbb{C} = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

などと書くことができます．

●包含関係 $A \subset B$

集合 A が集合 B に含まれる (A は B の部分集合) を意味します．$B \supset A$ も同じ意味です．例えば $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$，$\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$ などです．ところで $A \subset B$ であることは「$a \in A$ ならば $a \in B$」となることです．従って，$A = B$ を証明するためには $A \subset B$ および $B \subset A$ を示して，すなわち,「$a \in A$ ならば $a \in B$，および，$a \in B$ ならば $a \in A$」を示して導きます．集合の演算では等号の変形だけではうまく証明できない場合が多くあります．上述の考え方は大変重要です．

なお，ここでは $A \subset B$ は $A = B$ の場合を含めていることに注意して下さい (混乱を与えるようですが $A = B$ を含めない意味で使う人もいるので，他の本を読むときは注意が必要です．大切なことはどのような意味で使っているかを明示して統一して使うことです)．A が B の部分集合で $A \neq B$ のとき，すなわち，A は B の真部分集合であることを強調する場合は， $A \subsetneq B$ と書きます．

もう一つ注意をします．$a \in A$ を $a \subset A$ と書いてはいけません．$\subset$ は集合同士の関係です． $\{a\} \subset A$ ならば正しい書き方です．

●区間は３種類あります．開区間 (a, b)，閉区間 $[a, b]$，半開区間 $(a, b]$，$[a, b)$ です．

$$
\begin{aligned}
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \\
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}
\end{aligned}
$$

これらは有界区間です (有限区間ともいう)．無限区間としては以下のものがあります：

$$
\begin{aligned}
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\} \\
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\} \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < b\} \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq b\} \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

●共通部分 $A \cap B$ (交わりともいいます)

集合 A と B の共通部分を表します．すなわち，$A \cap B = \{a; a \in A$ かつ $a \in B\}$ です．また，n 個の集合の共通部分 $\{a;$ すべての $k = 1, 2, \cdots, n$ について $a \in A_k\}$ を

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

と書きます．

●合併集合 $A \cup B$ (和集合ともいいます)

集合 A と B の合併集合を表します．すなわち，$A \cup B = \{a; a \in A$ または $a \in B\}$ です．また，n 個の集合の合併集合 $\{a;$ ある $k = 1, 2, \cdots, n$ について $a \in A_k\}$ を

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

と書きます．

●差集合 $A \setminus B$

A の要素のうちで B に含まれないものの全体です．すなわち，$A \backslash B = \{a;\ a \in A,\ a \notin B\}$ です．

●補集合 A^C

補集合とはそこに属さない要素の集まりです．これを定めるためには全体の集合が何であるかを明確にしておく必要があります．全体を X とすれば $A^C := \{a \in X; a \notin A\}$ です．差集合の形で書けば $A^C = X \setminus A$ です．なお，高校までは A の補集合を $\overline{A}$ と表していたかもしれません．大学では $\overline{A}$ は別の意味 (集合の閉包) で使われるので，補集合は A^C と書くようにして下さい (A^c と小文字を使う人もいます．C は complement の頭文字です)．

●空集合は正式には $\emptyset$ と書きますが，ギリシャ文字 ϕ (ファイ) が代用されます．

5 証明や論理に関係する記号について

●$\forall$ (任意の，すべての) と $\exists$ (存在する)

$\forall$ は任意の (すべての) を意味します (Any または All の頭文字 A をひっくり返したものです．英語では any と all は別の意味ですが，数学では同じ意味になります)．例えば，x は実数のとき， $\forall x \neq 0, x^2 > 0$ は「0 でないすべての x に対して x^2 は正となる」を意味します．

$\exists$ は (少なくともひとつは) 存在するを意味します (Exist の頭文字 E をひっくり返したものです)．例えば $\exists x \neq 0,\ f(x) = 0$ は「0 でない x で $f(x) = 0$ をみたすものが (少なくとも一つは) 存在する」の意味です．

$\forall$ と $\exists$ ではまったく意味が異なります．正確に使えるようになるためには修行が必要です．いくつかの例を書きますので参考にして下さい．

(1) 「$\forall a \in A$ に対して $a \in B$」 は $A \subset B$ を意味し，
「$\exists a \in A$ に対して $a \in B$」 は $A \cap B \neq \emptyset$ を意味します．

(2) 「$\forall k = 1, 2, \cdots, n$ について $a \in A_k$」 は $a \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ であり，
「$\exists k = 1, 2, \cdots, n$ について $a \in A_k$」 は $a \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ です．

(3) 「$\forall x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$」 は $f \equiv g$ を意味し，
「$\exists x \in X$ に対して $f(x) \neq g(x)$」 は $f \not\equiv g$ を意味します．

●証明の始まりに「なぜならば」の意味で $\because$ と書くことがあります．また,「ゆえに，よって」の意味で $\therefore$ を使うこともあります．点の方向に注意して混同しないようにして下さい．$\because$ は 3 点を円で囲んで用いる場合もよくあります．

●証明の終わりを明示する意味で □ や ■ を証明の最後に用いている本が多くあります．講義では // (2 重スラッシュ) を用いることが多いでしょう．

6 その他の注意

●微分の記号についての注意：$f'(ax+b)$ について．

$f'(ax+b)$ という記述は

「 $f'(t)$ に $t = ax+b$ を代入した意味」

として用いることにします．$f(ax+b)$ の微分を意味する場合は $(f(ax+b))'$ と記して下さい．例えば $f(x) = \sin x$ のとき，$f'(ax+b)$ は $\cos(ax+b)$ であり，$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$

を意味するのではないと言うことです．なお，$f'(ax+b)$ の意味をより明確にするためにはカッコをつけて $(f')(ax+b)$ と書くとよいでしょう．

ところで，f' を高校では (エフ) ダッシュと読んでいた思いますが，これをダッシュ(dash) と読むのは日本だけのようです．外国ではプライム (prime) が使われ，大学でもそのように読まれることが多いと思います．この機会に改めるとよいと思います．

●逆関数の記号 f^{-1} について

一般に関数 f が逆関数をもつとき，それを f^{-1} と書き，エフ・インバースと読みます．これはよいのですが，三角関数では注意が必要です．多くの教科書では $\sin x$ の逆関数を $\sin^{-1} x$ と書いていますが，伝統的に $\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ を意味します．この類推で $\sin^{-1} x$ は $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ の意味と混同するおそれがあるからです．$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ を使う場合には記号の意味に気をつけて下さい．

混乱を避けるためには，$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数には

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x$$

の記号を用いるとよいでしょう．それぞれアークサイン，アークコサイン，アークタンジェントと読みます．

●ベキ乗根と指数

x の n 乗根は $\sqrt[n]{x}$ と書かれますが $x^{1/n}$ とも書きます．指数については 2^{3^4} は 2 の $3^4(=81)$ 乗であって $2^3(=8)$ の 4 乗ではないことに注意して下さい．すなわち，括弧をつけて書けば

$$x^{y^z} \quad \text{は} \quad x^{(y^z)} \quad \text{であって} \quad (x^y)^z \quad \text{ではありません．}$$

ちなみに，$(x^y)^z = x^{yz}$ です．同じ理由で

$$\log x^{y^z} = y^z \log x \text{ は正しいですが } \log x^{y^z} = z \log x^y \text{ は間違いです．}$$

できるだけ括弧を用いて混乱をさけて下さい．なお，自然対数の底 e について e^A を $\exp(A)$ と書くことがあります．また，対数関数 $\log x$ を $\ln x$ と書いてある本があります．これらも覚えておきましょう．

●集合の個数 (濃度)

X が有限集合のとき，その要素の個数を $\sharp X$ で表します ($|X|$ で個数を表す人もいますので注意して下さい)．例えば $X = \{1, 2, 3\}$ ならば $\sharp X = 3$ です．X が無限集合の場合は個数は無限ですが，その無限の度合い (濃度という) を区別します．自然数全体は可算無限集合で，その濃度を $\aleph_0$ (アレフゼロと読む) と書きます．実数全体の濃度は $\aleph$ (アレフと読む) です．すなわち，$\sharp\mathbb{N} = \aleph_0$, $\sharp\mathbb{R} = \aleph$ です．アレフはヘブライ語のアルファベットの最初の文字です．

7 ギリシャ文字一覧

大文字	小文字	発音
A	α	アルファ(alpha)
B	β	ベータ (beta)
Γ	γ	ガンマ (gamma)
Δ	δ	デルタ (delta)
E	ε	イプシロン (epsilon)
Z	ζ	ツェータまたはゼータ (zeta)
H	η	エータまたはイータ (eta)
Θ	θ	シータまたはテータ (theta)
I	ι	イオタ (iota)
K	κ	カッパ (kappa)
Λ	λ	ラムダ (lambda)
M	μ	ミュー (mu)
N	ν	ニュー (nu)
Ξ	ξ	グザイまたはクシィ(xi)
O	o	オミクロン (omicron)
Π	π	パイ (pi)
P	ρ	ロー (rho)
Σ	σ	シグマ (sigma)
T	τ	タウ (tau)
Υ	υ	ウプシロン (upsilon)
Φ	$\varphi,\ \phi$	ファイ (phi)
X	χ	カイ (chi)
Ψ	ψ	プサイ (psi)
Ω	ω	オメガ (omega)

先ほど述べましたが ε や δ が小さな正数を表すように，ギリシャ文字はかなり決まった使い方をします．π は円周率を表します．θ は角度を表すときはシータと読みますが，それ以外ではテータと読まれるようです．その他の習慣としては，例えば 2 変数関数の変数変換などでは φ と ψ がペアで用いられます．複素数の表示では $z = x + iy$ に対応して $\zeta = \xi + i\eta$ と書かれます．また Δ はラプラス作用素の意味 $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ でも使われます．小文字のデルタではクロネッカーの記号 δ_{ij} を覚えておきましょう：

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases}$$

8 ノートを上手に取る上での注意

●皆さんのノートを見ると，文字の区別が不明確な書き方が多く見られます．特に注意すべきはアルファベットの大文字小文字および数字との区別です．例えば

「S と s」，　「P と p」，　「Y と y」

「b と 6」，　「q と 9」，　「z と 2」

などです．文字の混同は論理の混乱に繋がります．これらの区別を明確にするために，

小文字のアルファベットは筆記体で書く

ことを奨励します．下記は字体別のアルファベットの一覧です．