

可視光の合成を題材とした 三角関数分野に対応する教材の開発と実践

水野 凌兵 (名城大学 理工学部 数学科)

村瀬 勇介◇ (名城大学 理工学部)

伊藤 将吾 (名城大学 理工学部 数学科)

渡辺 愛 (名城大学 理工学部 数学科)

Abstract. 本研究では、高等学校において短時間実践可能な数学教育教材の開発を行った。教材は可視光の合成を題材として、光を合成した結果の色を三角関数の合成を用いて予測するという内容であり、アクティブラーニング、特に問題・課題解決型学習に対応した教材になっている。本論文では教材の背景と内容について説明した後実践の報告を行い、その結果に関して考察する。

Keyword: アクティブラーニング, 課題解決型学習, 可視光の合成, 三角関数, 和積の公式

1 序論

2012年のOECD生徒の学習到達度調査(PISA2012)では、数学的リテラシーを中心分野として、読解力、科学的リテラシーを加えた3分野の調査が実施された。対象は65の国と地域(OECD加盟34ヶ国、非加盟国31ヶ国・地域)の約51万人の15歳修学生徒である。PISA調査は特定の学校カリキュラムをどれだけ習得しているのかを見るものではなく、義務教育終了段階の15歳児が持っている知識や技能を、実生活の様々な場面でどれだけ活用できるかをみるものである。

その調査の一分野である数学的リテラシーとは、様々な文脈の中で定式化し、数学を適用し解釈する個人の能力であり、数学的に推論し、数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述・説明し、予測する力を含む。これは個人が世界において数学が果たす役割を認識し、建設的かつ積極的で思慮深い市民に必要な確固たる基礎に基づく判断を決定を下す助けとなるものとされている。

日本人の調査結果は[2]などにまとめられており、数学的リテラシー、読解力、科学的リテラシーの3分野に全てにおいて平均得点が比較可能な調査以降最も高くなっていることがわかる。また数学的リテラシーの得点は、平均得点が低下した2006年に比べて上昇しており、得点順位も上位に位置している。ここから15歳の平均的日本人が持つ数学的能力は高い水準にあることがわかる。

PISA調査では単に学力にあたるものだけを調査するのではなく、生徒がそれらの学習や学習環境に対してどのような意識を持っているかも調査している。この調査は生徒質問紙調査呼ばれ、数学に関する項目としては数学における興味・関心や楽しさ、数学における道具的動機付け、数学における自己効力感、数学における自己概念、数学に対する不安、の5つの観点から調査が行われる。「数学における道具的動機付け」は数学を学ぶ内発的動機(特に何らかの達成すべき目標・理由)があるかどうか等、「数学における自己効力感」では具体的な問題が解けると思うかどうか等、「数学における自

己概念」では良い成績がとれていると思うかなどの抽象的に数学ができると思うか等が調査対象となる。これに加え、生徒質問紙では数学の授業の雰囲気や教師との関係性についても調査が行われている。こちらでは授業と教室の雰囲気、教師と生徒の関係性、教師に対する評価等が調査対象である。

この生徒質問紙による調査の結果から、我が国では「数学における自己概念」及び「数学に対する不安」については2003年に実施された調査の結果とおよそ同程度であるが、「数学における興味・関心や楽しみ」、「数学における道具的動機付け」、「数学における自己効力感」の3つの指標において肯定的な回答が増加しており、数学に対する認識が改善している傾向が見える。しかし、その内容は未だ他のOECD加盟国と比較して大変悪く、全ての項目においてOECD平均を大きく下回っている。このことから「日本の生徒は成績は良いが、数学を楽しいとも有用だとも思っておらず、強い不安を抱えている」という状況であることが読み取れる。

また、数学の授業の雰囲気や教師との関係性についての調査結果からは、我が国の「数学の授業の雰囲気」はOECD平均と比べてかなり良好であり、かつ我が国の「生徒と教師の関係」は良好な方向に改善しつつあることがわかる。この点はこれまでに教科指導における方法論や教育手法の研究・改善を続けてきた結果であるといえる。ただし、「先生は生徒が満足しているかどうかに関心がある」という項目に関してのみOECD平均を未だ大きく下回っており、生徒からは「先生は自分たちの満足感に興味がない」と思われていることがわかる。これは教師が自分が為すべきことに囚われているのが原因であると考えられる。

つまり、これらの結果をもたらした原因と指導する側の問題点を考察すると次の問題が浮かび上がってくる。

- ・ 指導すべきとされる内容と指導方法に囚われすぎており、生徒の感じ方や反応に対して目が向きにくくなっている。
- ・ 現行の教科書内容にこだわるあまり、生徒が数学の有用性や楽しさを感じにくくなっている。また、教師側から有用性や楽しさを伝えられていない。
- ・ 生徒が主体的に数学的課題に取り組んだり問題解決したりする経験に乏しいため、数学を学

ぶ理由が生まれにくく、「できる」「使える」という感覚も生じにくい。

これらの問題点は以前から指摘されていたものであり、近年アクティブラーニングの重要性が議論されるようになった背景そのものであるといえる。

我々はこの問題を解決するためにはまず数学の授業における自己指導能力の向上、課題解決能力の向上を進めていくことが必要であると考え、日常生活の疑問や課題を数学によって解決する課題解決型学習の教材研究と実践を行った。

2 題材と物理的背景

今回の教材では、可視光の合成を題材として利用する。そのため、可視光と光自身の性質についてある程度理解しておく必要がある。まず最初に教材を構成・実践する上で必要な事項についてまとめておく。

2.1 光の基本性質と可視光について

光は波としての性質と粒子としての性質を併せ持つといわれているが、このうち可視光としての性質に関わるのは波としての性質である。人間が光の色を認識する際には、光を波(正弦波)と見なしたときの波長と振幅が関与している。特に波長が光の色との関係で重要な役割を果たしており、波長と光の色の関係はおよそ表1の通りである。

分類	色	対応波長域 (nm)
紫外線	(非可視)	400 以下
可視光	紫	400 ~ 430
	藍	430 ~ 480
	青	480 ~ 500
	緑	500 ~ 570
	黄	570 ~ 590
	橙	590 ~ 610
	赤	610 ~ 780
赤外線	(非可視)	780 以上

表 1: 光の波長と色の関係性

上記の対応関係は光が $y = a \sin kt$ で表される場合の波長に対応しており、このような単純な形をした光ならば上の表によっておよその色が決定され

ることになる。このように重ね合わされていない単純な光を**単色光**という。

しかし、通常の光は様々な波長の光が重ね合わされた状態になっており、人間が知覚できるのは混ぜ合わされているうちの強い(振幅が大きい)波長のものということになる。プリズムによって太陽光が虹色に分解されるのは光が混ざっていることに由来する。

このような重ね合わされた光の色を正確に把握するためには光のスペクトル分解を行い、混ぜ合わされた光の詳細情報を得なければならない。しかしこのような操作は非常に困難であるから、今回は用いる光が $y = \sin kt$ で表現できると考えることとする。

また、光波の振幅は光の強さに対応し、その光を知覚する際の色合いの明るさ・暗さを表すことになる。振幅が大きい場合は強い光となるため対応する以上に白に近く明るく見え、振幅が小さければ弱い光となり、灰色がかかった暗い色となる。

可視光のうち白色光は特殊な性質を持っており、光の波長だけでは白色光になるかどうかは決まらない。これは単色光は白色光にはならないことも意味している。白色光になるには多くの色の光がある程度以上合成されており、しかも合成結果の振幅がある程度以上大きくなるのが条件となる。

2.2 加法混色 (色光の3原色)

人間が視覚によって可視光を知覚するとき、その色に対応する波長を持つ光が目に入ってきている。言い換えれば、色を生成する光そのものを知覚している。

我々が可視光を混ぜたものを見ている場合、結果として混ぜる対象となった両方の光を受け取っていることになる。つまり、可視光を混ぜるという行為は我々が知覚する光の色情報を増やす行為であるといえる。このような理由から可視光の合成による色の変化は**加法混色**と呼ばれている。

加法混色における3原色は「赤 (Red)」「緑 (Green)」「青 (Blue)」であり、一般にコンピュータ上で用いられる RGB カラーとおよそ同等の内容を表す。これらを全て混ぜ合わせると白色光になることが知られている。

加法混色において、混色結果の色はおよそ次の図のようになる。

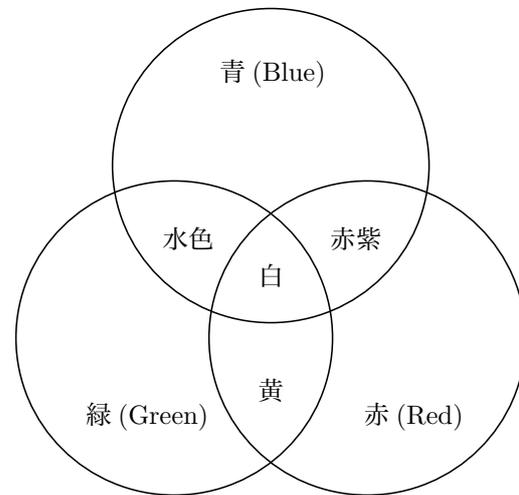


図 1: 加法混色の結果概要

2.3 減法混色 (色料の3原色)

我々が物質の色を知覚する際には、物質に当たって反射した光を感知していることになる。つまり、物質が吸収した残りの光を感知しているのである。絵の具を混ぜる際に見るような物質の色の混合は反射する光を減らす行為であり、結果として我々の目に届く色の情報量を減らしていることになる。我々に届く光の量を減らしていることから、色料の混色は**減法混色**と呼ばれている。

減法混色における3原色は「黄 (Yellow)」「赤紫 (Magenta)」「水色 (Cyan)」であり、印刷に用いる顔料などはこの3色をベースとして用意される。色料の3原色は全て混ぜ合わせると黒になることが知られている。

青と黄色を混ぜると緑になるなどの通常我々がイメージする混色はこの減法混色によって与えられる結果であり、他の混色の結果予測もこの減法混色によるものになりがちである。

一般には加法原色における混色結果と減法原色における混色結果は異なるので、どちらの混色を考えているのかは区別しなければならない。

なお、減法混色における混色結果の色はおよそ次の図のようになる。

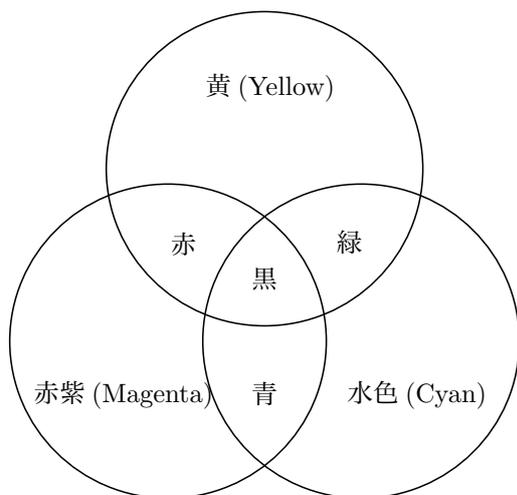


図 2: 減法混色の結果概要

2.4 光の混色における困難と本教材

本研究で作成した教材では正弦波の重ね合わせで合成結果を予測するとともに、実験によって予測が正しいかどうか検証している。従って、本来は次のような条件を整えなければならない。

- 合成対象とする光は単色光とし、その色と波長を決定する。
- 決定した波長の光を発生させられるようにし、実験環境を整える。
- 理論面からの合成結果と実験結果が一致することを確認する。

しかし、残念ながらこれらの条件を完全に満足するのは困難である。

まず合成対象の光の選定について考える。対象とする光は高等学校の既習内容で処理できるようにするには単色光を用いる以外に選択肢はない。色と波長の選択に関しては、理論面での結果と一致することが確認しやすい色と波長を選択すればよい。だが、この段階で既に述べたような可視光の構造と色の認識に関連する複雑さと後述するような理論上の困難があり、簡単には合成結果が検証できない。この問題を解決するためある程度合成結果の予測方法を確立しておく必要があり、さらにその方法による予測と結果が合致する波長の光を選定しなければならない。そのため、今回構成した教材で使用している光の設定を他の設定に置き換えることは難しい。

さらに、実験においては選定した波長の光を発生させることが非常に困難である。単色光はレーザーや発光ダイオード等を用いなければ発生させることができず、これらの方法で発生させられる光を広範囲に照射するのは容易でない。市販のレーザーポインタを用いることで赤と緑の単色光の混合結果が黄色になることは確認が可能であるが、照射範囲が狭いため混合された範囲はさらに狭く、実際に視認が非常に困難であった。また、これらの方法で発生させられる光がターゲットとなる波長と一致するかはわからない。

手軽に用意できる懐中電灯などを利用した場合、発生する光が単色光ではなくなるため実験の精度と正当性に問題が生じる。今回の教材実践内で行った実験のように懐中電灯の光をセロハンを通して着色する方法をとり照射範囲を広くすれば、混色した部分の視認性を高めることができると考えられる。しかしこの場合は発生した光が単色光ではないので、計算で確かめる混色結果とは異なる結果となる可能性がある。実際に実験を行った結果においても、予想と異なる混合結果となるケースが多く見られた。

以上の理由から、実験に用いる光の選定は慎重に行う必要がある。今回は懐中電灯とセロハンを用いた方法で緑色の光と赤色の光を発生させ、光量などを調整することで理論通りの結果を得ることができたので、これを利用して教材を構成することとした。もちろん調整を行って実験環境を構築しているため、教材内で行う計算の内容はこの実験の内容と合致していない可能性が高い。この点は大きな問題点であり、指導する側は十分に理解しておかなければならない。

なお、教材中では赤色の光は波長を 650nm、緑色の光は波長を 520nm としている。

3 題材の数学的な取り扱いと考察

対象とする光は単色光であり、 $y = a \sin kt$ で表現できるとする。このとき関数 y の周期は $\frac{2\pi}{k}$ となる。

光速を v 、波長を λ 、振動数を f 、周期を $T = \frac{2\pi}{k}$ とおくと、物理学でよく知られているように、

$$v = f\lambda, \quad f = \frac{1}{T}$$

が成り立っており、これを用いると

$$k = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

という関係式が成立する。これを代入すると、今回考えている光は

$$y(t) = \frac{2\pi v}{\lambda} t \quad (1)$$

で表せることがわかる。

赤色の光を波長を 650nm, 緑色の光を波長 520nm とすると, 関係式 (1) より赤色の光に対応する関数 $f(t)$ と緑色の光に対応する関数 $g(t)$ はおよそ

$$\begin{cases} f(t) = \sin(0.9231 \times 10^{15} \pi t) \\ g(t) = \sin(1.1538 \times 10^{15} \pi t) \end{cases}$$

となる。

波の重ね合わせの原理を用いると $f(t)$ と $g(t)$ の合成波 $h(t)$ は

$$h(t) = f(t) + g(t)$$

で求められ, 三角関数の和積の公式

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} h(t) &= \sin(0.9231 \times 10^{15} \pi t) \\ &\quad + \sin(1.1538 \times 10^{15} \pi t) \\ &= 2 \cdot \sin \frac{(0.9231 + 1.1538)10^{15}}{2} \pi t \\ &\quad \times \cos \frac{(0.9231 - 1.1538)10^{15}}{2} \pi t \\ &= 2 \cdot \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi t) \\ &\quad \times \cos(0.1154 \times 10^{15} \pi t) \end{aligned}$$

となることがわかる。

この関数 $h(t)$ のグラフは次の図 3 の通りとなる。この関数の周期を数学的に計算し波長を求めると, 合成光は赤外線に該当する非可視光となる。しかし緑と赤の単色光は合成すると黄色になることが知られており, 非可視となるのは現象と一致しない。

そこでこの関数を

$$2 \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi t)$$

を色を決める主要部分とみなし,

$$\cos(0.1154 \times 10^{15} \pi t)$$

部分はその光の明るさを変化させる要素であるとみることにする。つまり, 一定の色の光が明滅していると考えるのである。

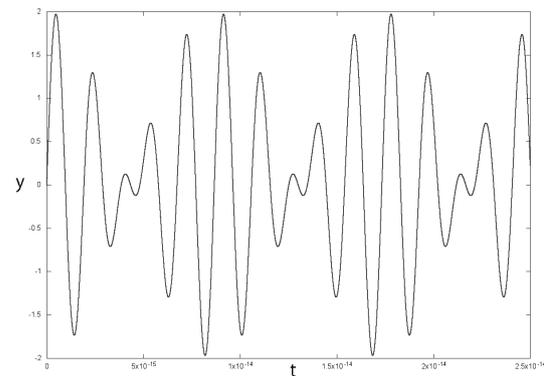


図 3: $h(t)$ のグラフ

合成波の周期を計算すると一秒間に数百万回明滅していることになるが, 人間が認識できるのは明るくなっている部分のみと考えられるので, 明滅していない一定の明るい光だと見なして色を識別することにした。つまり, 合成波の色は

$$2 \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi t)$$

のみによって色が決定しているとみなすことにするのである。これは図 4 にあるように波の振幅と位相を無視すれば, 波を構成する部分部分は, 主要部分とみなした波とほぼ同じ形状をしていることから感覚的に説明できる。

合成波の一部には位相の反転を起こすために周期が半分になっている箇所があるが, この部分の波長を計算すると紫外線となっており, 人間が色を感じずる際には影響がないことがわかる。

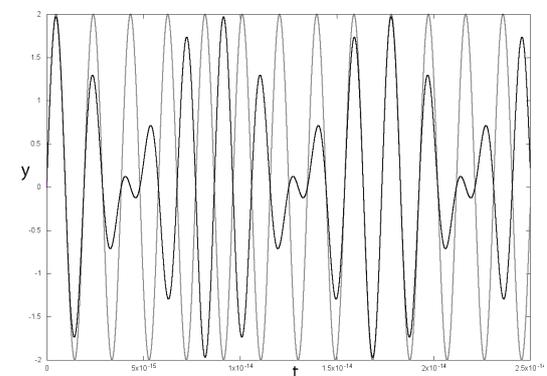


図 4: $h(t)$ と主要部分の比較

このように合成結果の \sin 関数部分のみに着目して単色光とみなしたとき, この波の波長はおよ

そ 578nm となる。表 1 にあるように 570nm 以上 590nm 以下の波長を持つ光は黄色に見えることから、合成光の色は黄色であると推測できる。この結果は経験によって知られている結果と一致している。

4 教材の概要

教材題名

「光は混ぜると何色になる?」

教材実践対象

高等学校第 2 学年以上 (数学 II まで履修済みであること。物理を履修していることが望ましい。)

教材のねらい

- (a) 取り扱う題材に興味を持ち、主体的に学習に取り組むことができる。
- (b) 光の色についての基本的な性質を理解し、単色光の合成結果を三角関数を用いた計算で求められるようにする。
- (c) 単色光の合成結果が推測できることを通して数学の有用性を感得する。

評価基準

- (a) 光の色の性質と、三角関数によって光の合成が表現・処理できることに興味を持ち、積極的に学習活動を進めることができる。(興味・関心・態度)
- (b) 光自身と光の色についての基本的な性質を理解し、単色光の合成結果を三角関数を用いた計算で求められる。(知識・理解)
- (c) 合成した結果の関数から光の色を推測することができる。(思考・判断・表現)

授業の概要 (1 時間目)

まず「青色と黄色の光を混ぜると光の色は何色に見えるだろうか?」と問いかけ、その結果を予想させる。混ぜる光がどちらも単色光であれば結果は薄い青となるので、このことを実験などで確認し、通常の絵の具などの混色 (減法混色) の結果とは異なることを認識させておく。

続けて「赤色と緑色の光を混ぜると光の色は何色に見えるだろうか?」と発問し考えさせ、それと同時に「光を混ぜた結果が何色になるかを調べるにはどうしたらよいだろうか?」と理由を考えさせる発問を行う。この後単色光の正弦関数による表現、波長・周期・振動数・光速の意味とその間に成り立つ関係性、光の波長と色の関係性を順に確認していく。この段階では波長と色の対応にまで深く触れる必要はない。

確認が終わった段階で混ぜる対象となる光を正弦関数で表現することが混合結果を調べるのに役立つことに気付かせ、「赤色の光 (波長 650nm) と緑色の光 (520nm) をそれぞれ sin 関数を用いて表そう。」と本時の課題を設定する。

課題を設定したら nm という単位の意味を補足した上で計算を進める。特に光は $y = \sin kt$ の形で表せるとして、本時に確認した物理的な関係式を用いて k の値を求めるのが目標である。

計算がしやすいように順に誘導を行い、計算の結果赤の光は

$$y = \sin(1.1538 \times 10^{15} \pi)t,$$

緑の光は

$$y = \sin(0.9231 \times 10^{15} \pi)t$$

で表現できることを確認してこの時間を終了する。

授業の概要 (2 時間目)

この時間では、最初に光の波長と色の対応関係、波の重ね合わせの原理、三角関数の和積の公式を確認する。この確認を行うと同時に、1 時間目に求めた光を表す関数の和を考えることで合成結果の色が得られることを確認する。この確認が完了したら「混ぜた光の色を調べよう。」と本時の課題を設定する。

和積の公式を用いて計算を行い、合成結果の色が得られたら「この色からどのように色を推測したら良いだろうか?」と問いかけ、単純な正弦関数になっていないことを再認識しておく。その上で図 3,4 のグラフなどを用いて、合成結果として得られた関数のうち

$$\cos(0.1154 \times 10^{15} \pi)t$$

は光の明るさに関係するため今回は無視し、

$$2 \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi)t$$

が色を決めていると考えるよう誘導する。

説明が完了したら $2 \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi)t$ の波長を計算させる。計算の結果波長が 578 nm であるとわかったら既に説明しておいた波長と色の対応関係に照らし合わせ、合成光の色の推測を行う。計算が正しければ黄色であると推測できるので、これに対し実験を行って実際に混色結果が黄色の光になることを確認する。

最後に光の色を混ぜた結果の予想という比較的身近な事象の問題が数学を用いて解明できたことを通して数学の有用性を確認し、この授業内容の注意点などを再度確認して本授業を終了する。

5 実践報告

実践日時

平成 27 年 (2015 年) 2 月 13 日

実践対象

名城大学附属高等学校 スーパーサイエンスハイスクールクラス 2 年次生徒 36 名

実践の様子 (1 時間目)

最初の青色の光と黄色の光の混合では、緑の光になるという予想が大半を占めていたが、水色という正解に近い予想や、それ以外も様々な意見が示された。この予想を行った結果生徒は光の混合結果が予想しにくいことを強く感じたようで、その後の学習に対する動機付けを十分にすることができた。

緑色と赤色の光の合成についても同様に予想を行ったが、予想しにくいということを自覚した後なので、どう予想したら良いか迷いが生じている様子が見て取れた。この結果、数学を利用して予想しようという方針提示は違和感なく受け入れられた。

光の諸性質や周期をはじめとした指標が理解できない場合は本教材における一切の活動が不可能となってしまうので、内容を理解できない生徒が出ないよう慎重に説明を行った。今回の実践対象クラスでは全員が物理を履修していることもあり、この点に関して危惧した事態は発生しなかった。

物理的な関係式の算出と確認でも同様の不安があったが、物理で一度学習しているためにつまずく生徒は非常に少なく、比較的スムーズに関係式の算出を行うことができた。多少算出に苦勞する生徒もいたが、今回の実践ではグループワークで授業を

進めていたため、グループの他の生徒の助言を受けることで学習を進められていた。

光を表現する関数を計算する段階では浮動小数点表示の小数計算が必要であるため、計算負荷の軽減のために電卓の使用を想定して準備した。しかし生徒はほぼ全員が電卓を使わずに計算できていたため、電卓は使用しなかった。

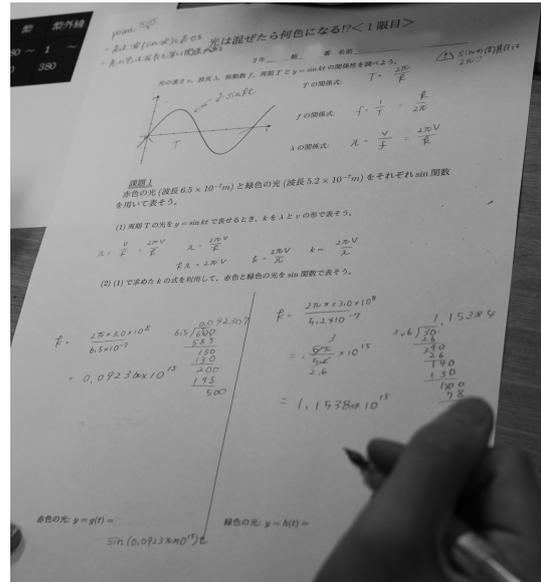


表 2: 記入されたプリントの例

授業内容を理解できない、もしくは計算を完了できない生徒はおらず、計画通りに 1 時間目の授業を終えることができた。

実践の様子 (2 時間目)

2 時間目のはじめに光の波長と色の対応関係、波の重ね合わせの原理、三角関数の和積の公式を確認した。物理と数学における既習内容の再確認であったため、この場面でも 1 時間目と同様に問題は起こらなかった。また、その後の合成光の式を求め段階でも特に大きな問題は見られなかった。

式が求まった段階で合成光の色をどのように予測するか説明を行った。この説明が受け入れられない場合は課題解決ができないため、この部分の説明を特に念入りに行う必要があった。

実際の説明では図 3,4 のグラフを印刷したもの他に

$$y = \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi)t$$

$$y = \frac{1}{2} \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi)t$$

のグラフも用意し、合成波のグラフと重ね合わせ透かすことで比較を行い、振幅の変化はあっても波長にあたる特徴は $y = 2 \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi)t$ と同様であることを確認した。



表 3: グラフを比較している様子

この活動を行った結果、光の色を決める主要部分は $y = 2 \sin(1.0385 \times 10^{15} \pi)t$ であることは違和感なく受け入れられた。

その後の波長を計算する活動も大きな問題は起こらなかった。一部計算に苦労している生徒はいたが、これも1時間目と同様にグループ内の他の生徒のフォローによってつまづきを軽減することができ、全員が時間内に計算処理を完了できていた。

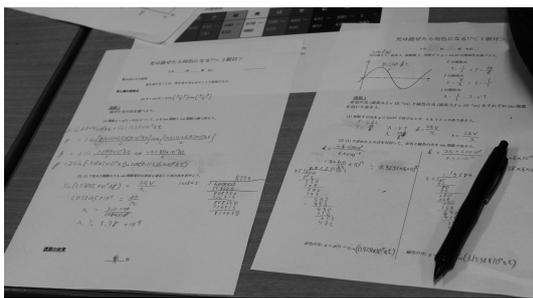


表 4: プリントを用いた個人探求

計算した波長をもとに合成光の色を予想する場面では各グループで活発な議論が行われていた。2時間を通して大半が個人による活動を行う時間となってしまったため、グループを作って授業を進める利点が少なかった。ただし、この結果の予想の場面ではグループを作った利点が現れていた。逆にグループを作らなかった場合はこの場面で困難が

発生する可能性がある。

計算と予想が完了したグループから実際に合成結果の観察を行い、自分たちの考察と予想が正しいかどうかの確認を行った。今回の実験では懐中電灯の光を色のついたセロハンに通すことで光を着色し、ルーペ等を通すことで光量の調整を行い、目的通りの結果が得られる位置に懐中電灯を配置するためスタンドを用いて器具の固定を行った。

先に述べた通り、この実験は今回の授業で計算を行っている内容を反映しているかどうかの保証がない。しかし、この実験では結果として光を合成した中心部が黄色になっており、この部分に注目することで計算結果と実験の結果の比較を行える状態になった。生徒の反応を見る限り、実験結果に対する疑問は生じていなかったようである。



表 5: 実験器具の構成



表 6: 実験結果を観察している様子

計算の完了までに必要な時間はグループ毎に差があり、最大で10分程度の違いがあったが、時間内に活動を終わられないグループはなかった。

6 考察とまとめ

6.1 実践後アンケートの結果と考察

授業後にアンケートを実施した。まずその項目を紹介する。

1. 今日の授業内容を理解することができましたか?
2. 今日の授業内容をおもしろいと感じましたか?
3. 数学は世の中で役立つと感じましたか?
4. 普段学んでいる数学を使っていろいろな事柄が解決できると思いましたか?
5. 具体的に数学を使ってどのようなことが解決できると思いますか?
6. その他自由に今日の授業の感想を書いてください。

項目1から4までは4段階の評価選択式、項目5,6は自由記述形式とした。この実践後アンケートの結果を項目毎にまとめ、そこから読み取れる生徒の反応などについて考察する。

1. 今日の授業内容を理解することができましたか?

よく理解できた	: 17人
ある程度理解できた	: 18人
あまり理解できなかった	: 1人
全く理解できなかった	: 0人

このように全体のうち97%が肯定的な回答をしていた。この結果から、授業を受けた生徒のほぼ全員が内容を理解できたと感じていることがわかる。これは数学における自己効力感が良い状態にあると考えられる。

2. 今日の授業内容をおもしろいと感じましたか?

大変感じた	: 19人
少し感じた	: 16人
あまり感じなかった	: 1人
全く感じなかった	: 0人

このように全体のうち97%が肯定的な回答をしていた。この結果から、授業を受けた生徒のほぼ全員が授業に好印象を持ち、楽しい授業であると感じ

ていたことがわかる。このことは生徒に強い関心を持たせることに成功したことを意味している。

3. 数学は世の中で役立つと感じましたか?

大変感じた	: 13人
少し感じた	: 19人
あまり感じなかった	: 4人
全く感じなかった	: 0人

このように全体のうち89%が肯定的な回答をしていた。この結果から、授業を受けた結果生徒の大部分が数学は道具として有用であると感じたといえる。

4. 普段学んでいる数学を使っていろいろな事柄が解決できると思いましたか?

大変感じた	: 9人
少し感じた	: 22人
あまり感じなかった	: 5人
全く感じなかった	: 0人

このように全体のうち86%が肯定的な回答をしていた。この結果も、生徒に数学の有用性を感得させるためにこの授業が一定の役割を果たしたことを表している。

しかし、この項目では「少し感じた」と回答した生徒が全体の61%に上っており、効果が十分であったかには疑問が残る。従って、さらに有用性を強く感じさせられるように今後教材の改善を行う必要があると考えられる。

5. 具体的に数学を使ってどのようなことが解決できると思いますか?

この項目の調査では、

- ・自然現象
- ・宇宙関連
- ・医療関係

などの回答が見られた。この結果を見る限り、高校生は数学が一定程度世の中の役に立っていると認識していることがわかる。特にこれらの回答内容は科学的なものを取り上げており、今回の教材で扱った題材との関係性を多少ではあるが確認することができる。このことから、今回の題材と類似の問題の解決に数学が利用できると少しは程度感じ

させることができたように思われる。

別の回答としては

- ・家電製品
- ・スマートフォンのアプリ

等の回答が見られた。これらの回答は誤りではないが、今回の授業の題材との直接的な関連性が見られない。従って、このように回答した生徒たちは今回の授業とは独立してこの項目に回答しており、今回の授業を行った効果がアンケートの回答へ波及しなかったといえる。

今回の授業実践では他の題材への数学適用可能性を感じさせることは重要視してなかったが、この教材の効果を高めるためにはこの点についての改善も必要となる。

6. その他自由に今日の授業の感想を書いてください。

この項目の回答もいくつか回答を抽出して考察を行う。

全体的には「楽しかった」という趣旨の意見が大勢を占めており、ここからも題材と授業自体に興味を持たせることに成功し、これまでより数学に対する興味・関心を持たせることができたといえる。その中でも、

- ・自分が学んだことから、高度なことができて嬉しかった。

という意見からは、自分たちが学んでいることがどのように役に立つのかを感じることができ、数学の有用性を認められるようになったのがわかる。数学の一般的な教科教育では学習の出口が曖昧になりがちであるが、このような教材をカリキュラムに取り入れることで生徒が学ぶ意義のひとつを感じられるようになると思われる。

また、類似の回答として次のような意見が見られた。

- ・日常生活では、あまり数学を身近に感じることは少なかったけれど、これからは少し視点を変えてみようと思いました。
- ・数学は理科と違って計算ばかりで実験をすることができないと思っていたけれど、この授業を聞いて考え方が変わった。

これらの意見からは、生徒がこれまで「数学は役に立たない」「数学を使う場面がない」と感じていたことがわかるとともに、その意識が今回の授業を通して変化し始めていることがわかる。学習内容に対する有用性意識や自己効力感、道具的動機付けは学習への意識やモチベーションに繋がる重要な要素であることは既に説明した通りである。ここで確認した生徒の意見からは、本教材の授業によって生徒の数学における道具的動機付けを向上させることができた、もしくは道具的動機付けを向上させるためのきっかけを作ることができたと考えられる。

ただし、本質的に道具的動機付けを向上させるためには生徒自身の思考・生活から内発的な動機を発生させなければならないので、このような具体的なケースの学習だけでは不十分であるといえる。しかし通常の授業ではこれらの意識を向上させるのは困難なので、課題解決型学習を含めた様々な種類の教材に継続的に触れることが重要となるだろう。

また、授業の難易度や構成に対する意見もいくつか見られた。

- ・計算で光の色を考えることができるという発想がなかったのですごくと思いました。内容は少し難しかったけど楽しかったです。

という意見に見られるように、生徒からはおおよそ好意的に受け止められており、授業の内容構成や進行速度に大きな問題はなかったと考えられる。さらに、

- ・実際に計算したあと光を見たので実感できた。

という意見もあった。これは最後に用意した実証実験が内容理解の助けになったことを示している。ここからは本研究で構成したような教材においては、理論だけで終わらせるのではなく現実の事象を確認できるようにすることが重要であるとわかる。

一方で、少数ではあるが次のような意見も見られた。

- ・少し面倒くさい計算が多くストレスになる部分があった。
- ・グループ活動の”自由度”は中途半端に感じた。

今回の授業では具体的に波長を求める必要が出てくるため、計算内容はどうしても複雑になりがちで

ある。これを軽減するためには、電卓やコンピュータを利用するなどして計算量を減らす工夫が必要になると思われる。また、グループ活動の必要性が希薄である点については前節でも触れたが、この意見からは生徒自身も同じように感じていたことがわかる。グループ活動の恩恵を受けた生徒はごく一部であったことも確かなので、この教材を実践する場合にグループ活動すべきかどうかは再度検討が必要である。

6.2 まとめ

実践後アンケートの結果からは、生徒の大多数が今回の授業の内容と授業自体を楽しいと感じたようであった。従って、本教材のねらい (a) は達成されたものと考えられる。

また、実践においては生徒ほぼ全員が自分で最後まで計算を進めて合成結果を予測することができ、残りの生徒も周囲の助けを借りながら最後まで活動を進められた。従って、本教材のねらい (b) も達成されたものと考えられる。

さらにアンケートの結果から、生徒は実際に起こる事象を数学を用いて予測できたことを実感し、数学の有用性をかなり強く認識することができたことがわかる。このことから、本教材のねらい (c) も達成されたものと考えられる。

生徒の多くは今回の教材実践で扱った内容を理解できたと感じているとともに、本教材を実践した結果生徒は数学に対する認識を改めるに至り、色々な場面で数学を利用して物事を考えることができると考えるようになった。一部の生徒は今回の方法を応用して他の事象についても検討したいと考えていた。このことから、生徒の数学における道具的動機付けや自己効力感を高めることができたと考えられる。

以上から、本教材は教材のねらいにある項目を達成するために、また生徒の数学における道具的動機付けや自己効力感を高めるために一定程度以上寄与できるものと判断できる。

その一方で、授業の実践における方法論やグループ分けの必然性など細部における問題点は多く残されている。教材内容に関しても、単色光の合成結果を予測するために正弦関数部分に着目する方法の正当性や実験における単色光の利用困難性など、理論面・実験面においても問題が残されている。教

材の効果をさらに高めるためにはこれらの問題の問題を解決する必要があるため、今後の課題として研究を続けていきたい。

7 付録

本教材の開発に際して作成した学習指導案及びワークシートを次頁以降に付録として掲載する。

8 謝辞

本教材の実践では名城大学附属高等学校において貴重な時間を頂きました。関係の先生方、生徒の皆さんに深く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] 高等学校学習指導要領解説 数学編理数編, 文部科学省
- [2] OECD 生徒の学習到達度調査 (PISA2012) のポイント, 国立教育政策研究所,
http://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/pisa2012_result_point.pdf

◇ : ymurase@meijo-u.ac.jp

○ 1 時限目 (50 分)

区分	学習活動・指導内容	指導上の注意・援助
導入 (5 分)	<ul style="list-style-type: none"> 青色の光と黄色の光を混ぜると何色になるかを予想する。 光を混ぜた際の色の変化は絵の具を混ぜたときの色の変化と結果が異なることを確認する。 	<ul style="list-style-type: none"> 異なる色の光を混ぜた結果は予想し辛いということを認識させる。光を混ぜた結果が予想と一致しているかどうかはここでは重視しない。
展開 1 (20 分)	<div style="border: 2px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p>問題：赤色の光と緑色の光を混ぜると何色になるだろうか？</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> 光の特徴について知っていることをまとめる。 光が波としての特性を持つこと、及び光の波長によって光の色が決まることを確認する。 波の周期、波長、振動数の意味について確認する。 $y = \sin kt$ を波とみたときに周期を T、波長を λ、振動数を f、光速を v とすると、T、λ、f に関して次の関係式が成立することを確認する。 (1) $T = 2\pi/k$ (2) $f = 1/T$ (3) $v = f\lambda$ 	<ul style="list-style-type: none"> 光の特徴を生徒に挙げてもらう中で、波であること及び波長と光の関係が挙げられない場合は教師側から提示する。 今回対象とする赤色と緑色の光は \sin 関数として表せるとすることに触れておく。 ここでは \sin 関数のグラフをもとにして説明する。ただし、横軸に時間、縦軸に変位をとったグラフを用いるのが普通なので注意する。 数学的な周期の考え方についてはここでは深入りしない。 確認する内容には物理で取り扱う関係式が含まれている。物理で既習の場合は導出過程については簡単に確認するだけに留める。
展開 2 (10 分)	<div style="border: 2px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p>課題 1：赤色の光(波長 650nm)と緑色の光(520nm)をそれぞれ \sin 関数を用いて表そう。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> nm(ナノメートル)と表記の意味について確認しておく。 周期 T の光が $y = \sin kt$ と表せるとして、k を λ と v の式で表す。 	<ul style="list-style-type: none"> 色と波長の対応表を読む上でも必要になるので注意する。 \sin 関数で表現することが問題の解決(色の判定)に役立つという事実に触れておく。その理由には深入りしない。 展開 1 で確認した物理法則を表す関係式が利用できることに気付かせ、数式処理によって $k = 2\pi v / \lambda$ が得られるようにする。
展開 3 (10 分)	<ul style="list-style-type: none"> 求めた k の式を利用して赤色と緑色の光を \sin 関数で表す。 	<ul style="list-style-type: none"> π、v、λ の具体的な値を代入して k の値を求めるよう指示する。計算量が多くなるため、必要に応じて電卓を利用したり、値の丸め方を決めたりして負担を軽減する。
まとめ (5 分)	<ul style="list-style-type: none"> 緑色と赤色の光を表す \sin 関数の内容を確認し、まとめる。 「緑色の光はおおよそ $y = \sin(0.9231 \times 10^{-15} \pi t)$、赤色の光はおおよそ $y = \sin(1.1539 \times 10^{-15} \pi t)$ で表せる。」 	<ul style="list-style-type: none"> 値の丸め方などによって結果に多少の差が出ることに注意する。生徒が求めた値と教師が示した値と異なる場合は、その誤差が許容されるものか精査し、許容される場合はその値を利用して学習を進める。

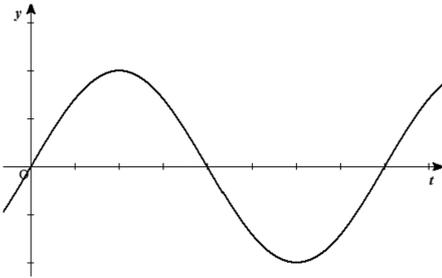
○ 2 時限目 (50 分)

区分	学習活動・指導内容	指導上の注意・援助
導入 (10 分)	<ul style="list-style-type: none"> 1 時限目に求めた光の式を確認する。 光を混ぜる操作を, 2 つの光を表す関数の和を求める操作であると考えを確認する。 2 つの sin 関数の和を, 1 つの sin 関数と別の定数や関数との積で表す方法を考える。 三角関数の和積の公式 $\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ を確認する。 	<ul style="list-style-type: none"> 生徒自身で計算が完了していない場合は提示した式を利用するよう指示する。 物理で波の重ね合わせ原理を学習しているかどうかに関わらず, 重ね合わせの原理については簡単に確認する程度に留める。 単純な sin 関数であれば波長を求めることで光の色がわかることを再確認しておく。 sin 関数の和の変形方法について検討する際に加法定理が挙げられたら, そこから和積の公式が導けることに気付かせるよう誘導する。
展開 1 (20 分)	<div style="border: 2px solid black; padding: 5px; text-align: center; margin-bottom: 10px;"> 課題 2 : 混ぜた光の色を調べよう。 </div> <ul style="list-style-type: none"> 赤と緑の光を表す関数をそれぞれ $g(t)$, $h(t)$ としたとき, $y=g(t)+h(t)$ を sin 関数と cos 関数の積で表す。 教師側から, 振幅は主として光の明るさに影響し, 光の色には影響しないことを説明する。 光の色だけを調べるならば, 得られた sin 関数と cos 関数の積のうち sin 関数部分のみに着目すればよいことを確認する。 	<ul style="list-style-type: none"> 計算はやや複雑になるため, 計算が困難な場合は電卓の使用などを検討する。 視覚的には明るさによって色が変わるため, 説明の際にその点について疑問を持たないように説明する。また, 実際の現象では振幅が色に影響することもあるので注意する必要がある。 sin 関数部分のみのグラフと合成波の式を対比させるなどして説明を行う。また, 合成波の一部に波長が半分になる部分があることに注意する。
展開 1 (15 分)	<ul style="list-style-type: none"> 求めた関数の積のうち sin 関数部分の波長に着目して光の色を求める。 計算が完了し色の予測が出来たら, 実際の結果を実験によって確認する。 	<ul style="list-style-type: none"> sin 部分だけに着目する理由が理解できていない生徒が居る場合は, 机間指導時に教師が再度説明するか, TA などが説明するなど対策をとる。 合成結果が黄色になるように実験器具を用意する。実験の際にはできる限り単色光を発生させる機材を用いることが望ましい。
まとめ (5 分)	<ul style="list-style-type: none"> sin 関数部分の波長と, その波長に対応する光の色を確認する。 「sin 関数部分はおよそ 578nm の波長をもつので, 混ぜた光は黄色だと考えられる。」 	<ul style="list-style-type: none"> 求めた波長から光の明滅が目では認識できないほど起こっていることを説明し, 結果として光のうち明るい部分だけを認識していることを補足してもよい。 波長が半分になっている部分は紫外線に該当し, 可視光ではないことから光の色に影響していないという説明を加えてもよい。

光は混ぜたら何色になる!?! < 1 限目 >

2年 _____ 組 _____ 番 名前 _____

光の速さ v 、波長 λ 、振動数 f 、周期 T と $y = \sin kt$ の関係性を調べよう。



T の関係式:

f の関係式:

λ の関係式:

課題 1

赤色の光 (波長 $6.5 \times 10^{-7}m$) と緑色の光 (波長 $5.2 \times 10^{-7}m$) をそれぞれ \sin 関数を用いて表そう。

(1) 周期 T の光を $y = \sin kt$ で表せるとき、 k を λ と v の形で表そう。

$$k =$$

(2) (1) で求めた k の式を利用して、赤色と緑色の光を \sin 関数で表そう。

赤色の光: $y = g(t) =$

緑色の光: $y = h(t) =$

光は混ぜたら何色になる!?!< 2 限目 >

2 年 _____ 組 _____ 番 名前 _____

重ね合わせの原理

波を混ぜることは、波を表す式を足すことで表現できる。

和と積の関係式

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

課題 2

混ぜた光の色を調べよう。

(1) 関数 $y = g(t) + h(t)$ について、 y を sin 関数と cos 関数の積で表そう。

(2) (1) で求めた関数のうち sin 関数部分の波長に着目して光の色を求めよう。

課題の結果

_____ 色