名城大学数学実践研究報告 第 1 号 (2015)

[論説]

判別式と終結式の考え方

前野 俊昭♣ (名城大学理工学部)

Abstract. 二次多項式の判別式は中等教育においても馴染みのある題材だが，より進んだ代数学への導入としても非常に適したものと言える．本稿では二次式の判別式の基礎となっている考え方がどのようなものかを復習し，それをもとに一般の高次多項式の判別式や終結式の概念の導出を紹介しながら，代数的発想の教材としての判別式の重要性を確認することにしたい．

Keyword: 代数方程式, 判別式, 終結式

序

数学の重要性はその理論展開にあり，戦略的発想に基づいた問題解決の手法を学ぶことにこそ数学教育の意義があると言える．数学的な問題への理論的アプローチとは，多様なアイデアを有機的に繋げながら息の長い議論を地道に積み重ねていくことに他ならない．一方，現在の中等教育のカリキュラムでは分野横断的な話題はむしろ忌避される傾向があり，単元間の繋がりを分断した構成が見られるのは憂慮すべき点である．高等学校までの教育で本格的な理論を学ばせるのは無理だとしても，問題を戦略的に解決していくことの意義や発想について何らかの示唆を与えることの効果は大きいだろう．

本稿で扱う判別式の話題は中等教育においても一般的で扱いやすい題材であるが，代数的な発想のエッセンスが詰まった素材という点で，その背後にある理論を意識させるのに適したものと言える．更に，判別式の考え方は現代的な代数学においても基礎的なものであり，最先端の研究でも現れる「生きた素材」であるということも強調しておきたい．

以下では，判別式の考え方がどのような理論と繋がっているのかを考察することになるが，端的に言えば，判別式は「多項式の根と係数の関係」と「対称式の理論」の二つから自然に導かれる概念である．こうした理論的な基礎から高次多項式の判別式や，二つの多項式に対して定められる終結式の概念がどのように導出されるのかを見ていく．また，関連する新しい話題として多変数関数の判別式についても簡単に紹介する．本稿で扱う内容の多くは高木 [3] に詳細な解説がある．

1 二次式の判別式

まず，次のような易しい問題を考えてみたい．

問題 1 x についての二次方程式 $x^2+bx+c=0$ が重解を持つのは係数 b, c がどのような条件を満

たすときか.

答は言うまでもなく判別式が 0 となるときだが，その条件を敢えて二通りの考え方で導いてみよう.

(解答 1) 二次方程式の解の公式から，与えられた方程式の解は $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$ である．この二つの解を $r_\pm$ とおくことにすると，これらの差は $r_+ - r_- = \sqrt{b^2 - 4c}$ となる．従って，重解を持つための条件は $b^2 - 4c = 0$.
(解答 2) 与えられた二次方程式の二つの解を，上と同じく $r_\pm$ とおくことにすると，重解を持つための条件は $r_+ - r_- = 0$. この条件は両辺を 2 乗した $(r_+ - r_-)^2 = 0$ と同値だが，左辺は $r_\pm$ の対称式なので，基本対称式を用いて表すことができる．二次方程式の解と係数の関係から $b = -(r_+ + r_-)$, $c = r_+ r_-$ であることに注意すると，$(r_+ - r_-)^2 = b^2 - 4c$ と表せるので，重解を持つための条件は $b^2 - 4c = 0$.

いずれの解答においても最終的には判別式 $b^2 - 4c$ が現れたが，それは方程式の解 $r_\pm$ で表すと二つの解の差の 2 乗 $(r_+ - r_-)^2$ であることに注意しておこう.

さて，これら二つの解答は大差ないもののように見えるかも知れないが、考え方において非常に大きな違いがある．まず,（解答 1）では方程式の具体的な解を経由しているのに対し,（解答 2）では解の $r_\pm$ は正体不明のままである．代わりに（解答 2）では，$r_+ - r_- = 0$ という条件式の両辺をわざわざ 2 乗するというトリックのような手順が一つ入っている．また,（解答 2）のような考え方が可能であるということは,「方程式自身は解かなくとも重解があるか否かの判断は可能」ということを意味している．これは非常に重要な事実であり，この先の考察のポイントとなる.

2 高次多項式の判別式

この節では二次多項式から更に進んで，高次多項式の判別式について考察する．手始めに，まず三次方程式に対して前節と同様に重解を持つための条件を求めてみよう.

問題 2 x についての三次方程式

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

が重解を持つのは係数 b, c, d がどのような条件を満たすときか.

まず，三次方程式に対しては，係数に対する四則演算とベキ乗根を取る操作を用いて解を表すような「解の公式」が知られている．ここでは具体的に公式を与えないが，例えば [3] を参照されたい．具体的に解を求められるとしたら，前節の（解答 1）のような解答は可能だろうか．実際には三次方程式の解の公式はかなり複雑な形をしており,（解答 1）のような方法は不可能とは言えないまでも，考え方としては無理がある．そこで生きてくるのが（解答 2）のような方針である.

与えられた方程式の三つの解を r_1, r_2, r_3 としよう．方程式が重解を持つのは $r_1 - r_2, r_1 - r_3, r_2 - r_3$ のいずれかが 0 となるときで，それは $(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_3) = 0$ と同値である．ここで（解答 2）の方法に倣って両辺を 2 乗し，対称式の話に持ち込むことを考える．$(r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2$ は r_1, r_2, r_3 についての対称式であるから，やはり基本対称式を用いて表すことができる．従って，解と係数の関係 $b = -(r_1 + r_2 + r_3)$, $c = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1$, $d = -r_1 r_2 r_3$ から，$(r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2$ は b, c, d の多項式として表されることになる．実際にこれを b, c, d で表してみると，

$$-4b^3 d + b^2 c^2 + 18bcd - 4c^3 - 27d^2$$

を得る．これが三次多項式の判別式である.

さて，ここまでの議論を踏まえれば一般の m 次多項式の判別式も同様の考え方で導かれることは明らかである．そこで m 次多項式の判別式の定義をまとめておくことにしよう.

定義 1 変数 x についての m 次多項式

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

の m 個の根を $r_1, \ldots, r_m$ とする．これらの根の差積の二乗

$$\prod_{1 \le i < j \le m} (r_i - r_j)^2$$

を $a_1, \ldots, a_m$ の多項式として表したものが $f(x)$ の判別式（discriminant）である．以下，$\Delta(f)$ で表すことにする.

判別式 $\Delta(f)$ は f の係数の多項式として原理的には常に具体的表示が可能な量である．一方，5 次以上の一般の方程式の解を，係数に四則演算とベ

キ乗根を取る操作を用いて表すような公式はそもそも存在しないことが知られている（Abel の定理, 高木 [3, §39] 参照）．つまり，5 次以上の代数方程式に対しては解を明示的に表すことはほぼ不可能であるにも関わらず，判別式を計算すれば重解を持つか否かは常に判断できるわけである．このような事が可能になるのは理論的な考察の強みと言える．

ここまでの議論で一般の m 次多項式に対する判別式の定義は明らかになったが，判別式を $a_1, \ldots, a_m$ の多項式として具体的に与えることは容易ではない．例えば，4 次式の判別式は 16 個の項が，5 次式の判別式は 59 個の項が現れる複雑な多項式である．実は次節で示すように，判別式はある種の行列式を用いて表示することができる．それに関連して，代数方程式 $f(x) = 0$ が重解を持つのは，$f(x)$ と $f'(x)$ が共通の根を持つことと同値であることに注意しておく．

この節のまとめとして，判別式は次の二つの理論的な支柱から導かれたものであることを確認しておきたい．

I. 多項式の係数は（符号を除き）根の基本対称式である．
II. 任意の対称多項式は基本対称式の多項式として表される．

3 終結式

この節では次のような問題を考えてみたい．

問題 3 変数 x についての多項式

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

$$g(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

に対し，方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解を持つための，係数 $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ に関する条件を求めよ．

前節までの考え方を応用すれば，次のような方針が容易に見えてくる．まず，$f(x)$ の根を $r_1, \ldots, r_m$ とし，$g(x)$ の根を $s_1, \ldots, s_n$ とする．共通解を持つための条件は，

$$R(f, g) := \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (r_i - s_j)$$

が 0 になることである．ここで，$R(f, g)$ が $r_1, \ldots, r_m$ について対称であり，$s_1, \ldots, s_n$ についても対称であることから，$R(f, g)$ は $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ の多項式として表すことができる．従って，方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通解を持つための条件は，$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ に関する条件として表すことができる．

具体例として，$f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ の場合を考えてみよう．このとき，

$$R(f, g) = a^2 d - abc - acd + b^2 + bc^2 - 2bd + d^2$$

となることがわかる．

一般に，$R(f, g)$ は次のような $(m+n)$ 次正方行列 ρ の行列式として表すことができる．ρ の成分 ρ_{ij} を，$1 \le i \le n$ のとき，

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 0, & 1 \le j < i,\ n+i < j \le m+n, \\ a_{j-i}, & i \le j \le n+i, \end{cases}$$

$n+1 \le i \le m+n$ のとき，

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 0, & 1 \le j < i-n,\ i-n < j-m \le n, \\ b_{j-i+n}, & i-n \le j \le m+i-n \end{cases}$$

と定める．このように定められた行列を Sylvester 行列という．ここで $a_0 = b_0 = 1$ とおいて考えると，実は行列 ρ の行列式はちょうど上で定めた $R(f, g)$ に一致する．$a_0 = b_0 = 1$ とは限らない場合も含め，次の定理が知られている．

定理 1 （Sylvester，高木 [3, §72] 参照）多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_{m-i} x^i$ と $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i} x^i$ の根をそれぞれ $r_1, \ldots, r_m$ と $s_1, \ldots, s_n$ としたとき，

$$(*) \quad \det \rho = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (r_i - s_j)$$

が成り立つ．

上の定理は次の方針で証明できる．まず，多項式 f と g が共通根を持つとき，$\rho \vec{v} = \vec{0}$ となるような $(m+n)$-成分の非零ベクトル $\vec{v}$ の存在がすぐに分かり，このとき $\det \rho = 0$ となる．また，$(*)$ の右辺が $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n$ の多項式として既約であることも言えるので，$\det \rho$ は $(*)$ の右辺で割り切れる．更に次数を比べると $(*)$ の両辺は定数倍の違いしかない．どちらにも $a_0^n b_n^m$ という項が現れることから，両者の一致が示される．

定義 2 多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_{m-i}x^i$ と $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}x^i$ に対し，行列 ρ の行列式を f, g の終結式（resultant）という．

ここで判別式の考察に戻りたい．多項式 $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ が重根を持つ条件は $f(x)$ と $f'(x)$ が共通根を持つことだった．共通根を持つ条件は終結式で表されるので，f の判別式 $\Delta(f)$ は終結式 $R(f, f')$ と関係していることが期待できる．実際，次のような有名な公式がある．

定理 2 多項式 $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ に対し，

$$\Delta(f) = (-1)^{m(m-1)/2}R(f, f')$$

が成り立つ．

一般に多項式 $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ の根を $r_1, \ldots, r_m$ とすると $f'(r_i) = \prod_{j \neq i}(r_i - r_j)$ は容易に分かるので，定理 1 を用いれば

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \prod_{1 \leq i < j \leq m}(r_i - r_j)^2 = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\prod_{i=1}^{m} f'(r_i) \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}R(f, f')\end{aligned}$$

となって，定理 2 が確かめられる．

上の定理は，判別式を特定の形の Sylvester 行列の行列式として表す公式を与えている．但し，やはり行列式の計算を実行しない限り具体的な形は得られないということに注意しておく．なお，discriminant という語も Sylvester [2] が導入したものである．

4 多変数多項式の判別式

最後に最近の話題として，多変数多項式の判別式について紹介する．これまで一変数多項式の判別式を考察してきたが，これを多変数多項式の場合に拡張することを試みる．この理論は Gelfand-Kapranov-Zelevinsky [1]（以下 GKZ）により 90 年頃に導入されたものである．彼らはより一般に N 変数の Laurent 多項式，即ち，$x_1^{\pm 1}, \ldots, x_N^{\pm 1}$ の多項式として表されるような有理式に対してその判別式の概念を定義している．以下，多項式という場合は Laurent 多項式を指しているものとする．また，多項式は複素数係数のものを考える．

多変数多項式に対しては重根に相当する概念を単純に考えることはできないので，多項式が重根を持つための条件から出発して判別式の概念を定義しようとするのは無理がある．一方で，一変数多項式 $f(x)$ が重根を持つ条件は方程式 $f(x) = 0$ と $f'(x) = 0$ が共通解を持つことと言い表すこともできた．そこで，この後者の条件を基に多変数多項式の判別式を導出する．

定義 3 N 変数多項式 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ に対し，方程式

$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) = 0$$

が $(\mathbb{C}^\times)^N$ に解を持つとき，f は退化している（degenerate）と言う．

今は Laurent 多項式を考察の対象としているので，$f(x)$ を関数として考えた場合の定義域は $(\mathbb{C}^\times)^N$ である．上の定義で「$(\mathbb{C}^\times)^N$ に解を持つ」としているのはその理由による．

一変数多項式の場合，その判別式は各次数毎に定義されていた．次数を指定することは多項式に現れる単項式の形を限定することに他ならない．N 変数多項式の場合，単項式 $x_1^{\omega_1} \cdots x_N^{\omega_N}$ は，そのベキ指数を見ることにより格子点 $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \mathbb{Z}^N$ と一対一に対応しているので，多項式に現れる単項式の形を指定することは $\mathbb{Z}^N$ のある有限部分集合を指定しておくことに相当する．有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^N$ を一つ定めたとき，対応する多項式の一般的な形は $\sum_{\vec{\omega} \in A} a(\vec{\omega})x^{\vec{\omega}}$, $a(\vec{\omega}) \in \mathbb{C}$ という形をしている．ここで，$\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$, $x^{\vec{\omega}} = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\omega_i}$ である．係数 $a(\vec{\omega})$ を一組定めることは，関数 $a : A \to \mathbb{C}$ を定めることに相当するので，A 内の点に対応する単項式が現れるような多項式の集合は $\mathbb{C}^A$ と同一視される．

以上を踏まえて，有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^N$ を指定したとき，判別式 Δ_A は次のように定義される．まず，$\mathbb{C}^A$ の部分集合 ∇_A を

$$\nabla_A = \left\{ a \in \mathbb{C}^A \;\middle|\; \sum_{\vec{\omega} \in A} a(\vec{\omega})x^{\vec{\omega}} \text{ is degenerate.} \right\}$$

と定める．$\mathbb{C}^A$ 上の多項式関数であって，∇_A 上恒等的に 0 になるようなもののうちで $\mathbb{Z}$ 上既約な多項式を Δ_A とする．このような多項式 Δ_A は符号を除いて一意的に定まる．この Δ_A が GKZ により定義された A-判別式である．（正確には，これは

∇_A の Zariski 閉包 $\overline{\nabla}_A$ の余次元が 1 の場合の話であり，$\overline{\nabla}_A$ の余次元が 2 以上の場合は $\Delta_A = 1$ と定める.)

このように定めた A-判別式は，特殊なケースとして一変数多項式の判別式や終結式を含んだ概念となっている．例えば，$N = 1$ で $A = \{0, 1, \ldots, m\}$ とすれば，Δ_A は通常の一変数 m 次多項式の判別式と一致する．また，$N = 2$ で

$$A = \{(i, 0) \mid 0 \leq i \leq m\} \cup \{(i, 1) \mid 0 \leq i \leq n\}$$

のとき，一変数の m 次多項式 $f(x)$ と n 次多項式 $g(x)$ に対して $F(x, y) = f(x) + yg(x)$ とおくと，$\Delta_A(F)$ は f と g の終結式 $R(f, g)$ に一致する．GKZ [1] にある例を一つ紹介しておこう．

例 1 三変数の二次同次式 $f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz$ の A-判別式は

$$\Delta_A(f) = a_1a_6^2 + a_2a_5^2 + a_3a_4^2 - 4a_1a_2a_3 - a_4a_5a_6$$

である．

一般に Δ_A は非常に複雑な多項式で（一変数多項式の判別式も既に複雑だった!)，その具体的な形を決定することも難しい．GKZ は Δ_A の Newton 多面体の頂点と，A の凸閉包のある種の三角形分割との間の対応関係を示した．この結果により，Δ_A にどのような単項式が現れるかについてはある程度知ることができる．A-判別式の理論は多面体の組合せ論の他，トーリック多様体の幾何学，トロピカル幾何，不変式論，超幾何微分方程式など様々な分野と関わりながら現在も活発に研究されている．

参考文献

[1] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants,* Birkhäuser, Boston, 1994, 532pp.

[2] J. J. Sylvester, *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants,* Phil. Mag., Ser. 4, Vol. 2 (1851), 391-410.

[3] 高木貞治, 代数学講義（改訂新版）, 共立出版, 1965, 381pp.

♣ : tmaeno@meijo-u.ac.jp