

Frohman-Gelca-Lofano 理論の解説

～Kuffman bracket skein module からみた A-多項式～

長郷文和（九州大学 D 2）

関西低次元トポロジー若手勉強会

2003 年 3 月 8 日

概要

[1] で展開されている Frohman-Gelca-Lofano 理論により、A-polynomial を Kauffman bracket skein module のある情報に読み替えることができることを解説する。

1 Character variety

まず最初に、有限表示群の $SL_2\mathbb{C}$ -表現についての準備をしておく。

以下、

$$G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \mid r_1, r_2, \dots, r_l \rangle$$

を有限表示群とする。ここで、各 $r_i = r_i(g_1, g_2, \dots, g_n)$ は $g_1, g_2, \dots, g_n$ の有限の長さの語。

1.1 有限表示群の Representation と Character

G の representation variety $R(G)$ とは、

$$\begin{aligned} R(G) &:= \text{Hom}(G, SL_2\mathbb{C}) \\ &= \{ (A_1, \dots, A_n) \in (SL_2\mathbb{C})^n \mid r_j(A_1, \dots, A_n) = 1 \text{ for } 1 \leq j \leq l \} \end{aligned}$$

のこととする。これは $\mathbb{C}^{4n}$ の部分集合で algebraic set となる。

$R(G) \ni \rho$ に対し、 $Tr(\rho) : G \rightarrow \mathbb{C}$ を $Tr(\rho)(g) = \text{trace}(\rho(g))$ for $g \in G$ で定義し、

$$Tr : R(G) \rightarrow Tr(R(G)) =: X(G) \subset \text{Hom}(G, \mathbb{C})$$

を、 $\rho \mapsto Tr(\rho)$ で定義する。すると、

命題 1 (Culler-Shalen [7]). $X(G)$ は variety になる。

この $X(G)$ を G の character variety とよぶ。

1.2 命題 1 の証明の概略

以下、命題 1 の証明の概略を示す。

まず、 $G \ni \gamma$ に対し、 $t_\gamma : R(G) \rightarrow \mathbb{C}$ を $t_\gamma(\rho) = \text{trace}(\rho(\gamma))$ for $\gamma \in G$ で定義する。このとき、次が知られている。

事実 1. $T := \{t_\gamma \mid \gamma \in G\}$ は ($\mathbb{C}$ に値を持つ関数の) 環として有限生成。特に $\mathbb{C}$ -algebra である。

この事実の証明の鍵となるのは、次の trace identity である。

trace identity of $SL_2\mathbb{C}$

$$\boxed{\text{trace}(AB) + \text{trace}(AB^{-1}) = \text{trace}(A) \cdot \text{trace}(B)}$$

これは、あとでも非常に重要な役割を果たす。

これにより、例えば、 $t_{ab} = t_a t_b - t_{ab^{-1}}$ for $a, b \in G$ がわかる。実際、 T の生成元として、次のものがとれることが知られている。

$$\{t_{g_{i_1} \dots g_{i_r}} \mid i_1, i_2, \dots, i_r : \text{distinct positive integers} \leq n\}$$

つまり、 T は高々 $n!$ 元生成になる。簡単のため、上の集合の成分数を m とする。

さて、

$$t : R(G) \rightarrow \mathbb{C}^m$$

を $\rho \mapsto (t_{\gamma_1}(\rho), \dots, t_{\gamma_m}(\rho))$ で定義する。すると、 $\text{Image}(t) = X(G)$ とみなせる。実際、[7] では、この $t : R(G) \rightarrow X(G)$ を regular map とみなし、 $X(G) = t(R(G))$ を algebraic set とみなせることが示されている。

1.3 Character variety の例

例 1. $G = \pi_1(T^2) = \langle l, m \mid lm = ml \rangle$ とする。このとき、 $\{t_l, t_m, t_{lm}\}$ が T の生成元となる。まず、 $x = t_l, y = t_m, z = t_{lm}$ とすると、

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4 = 0\} \supset X(\pi_1(T^2))$$

が確かめられる。実際、 $\rho \in R(\pi_1(T^2))$ に対し、 $\rho(l)$ と $\rho(m)$ の対角化により、

$$\begin{aligned} t_l(\rho) &= L(\rho) + L^{-1}(\rho), \\ t_m(\rho) &= M(\rho) + M^{-1}(\rho), \\ t_{lm}(\rho) &= L(\rho)M(\rho) + L^{-1}(\rho)M^{-1}(\rho) \end{aligned}$$

と表すことができる。(ただし、 $L(\rho)$ と $M(\rho)$ は $\rho(l)$ と $\rho(m)$ の固有値関数。) 従って、 $X(\pi_1(T^2))$ は、

$$X(\pi_1(T^2)) = \{(t_l(\rho), t_m(\rho), t_{lm}(\rho)) \in \mathbb{C}^3 \mid \rho \in R(\pi_1(T^2))\}$$

とパラメトライズされる。逆に、 $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4 = 0\}$ の元から $\pi_1(T^2)$ の $SL_2\mathbb{C}$ -表現が復元できるので、

$$\{x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4 = 0\} = X(\pi_1(T^2))$$

がわかる。

1.4 Function ring $\chi(G)$

以下、多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ の部分集合 S に対して、 $\langle S \rangle$ で S が生成するイデアルを表す。とくに、 $S = \{f_1, \dots, f_p\}$ のとき、

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^p h_i f_i \mid h_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \right\}$$

となる。

また、 G の character variety $X(G)$ に対し、その関数環

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m] / \langle X(G) \text{ の定義多項式} \rangle$$

(m は 1.2 で求めた T の次元) を、 $\chi(G)$ で表すことにする。

注. 部分集合 $V \subset \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0 \text{ for } \forall x \in V\}$$

を $I(V)$ と表し、 V の ideal という。このとき上で定義した $\chi(G)$ の代わりに

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m] / I(X(G))$$

を用いても、以下同様の結果を得ることができる。(この場合については [2] を参照。) $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m] / I(X(G))$ を $X(G)$ の coordinate ring とよぶ。

2 A-polynomial

以下、 K を 3 次元球面 S^3 内の結び目、 $N(K)$ を K の open tubular nbd とするとき、 $G_K = \pi_1(S^3 - N(K))$ とする。まず、次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} R(G_K) & \xrightarrow[\partial\text{-への制限}]{r} & R(\pi_1(T^2)) \\ t \downarrow & & \downarrow t \\ X(G_K) & \xrightarrow[\text{induced map}]{\tilde{r}} & X(\pi_1(T^2)) \end{array}$$

ここで、 Δ を $R(\pi_1(T^2))$ の対角表現からなる部分集合とする。

つまり、 $\pi_1(T^2) = \langle l, m \mid lm = ml \rangle$ として、

$$\Delta := \left\{ \rho \mid (\rho(l), \rho(m)) = \left(\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \right), L, M \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}$$

を考える。

$t : R(\pi_1(T^2)) \rightarrow X(\pi_1(T^2))$ の Δ への制限 $t|_{\Delta}$ は、例 1 で注意したように、

$$(\rho(l), \rho(m)) = \left(\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \right)$$

のとき、

$$t|_{\Delta}(\rho) = (L + L^{-1}, M + M^{-1}, LM + L^{-1}M^{-1})$$

と表される。

上記の対角表現対 $(\rho(l), \rho(m))$ のそれぞれの (1,1)-成分をとるという同一視写像 $j : \Delta \xrightarrow{\cong} (\mathbb{C} - \{0\})^2$ を考え、 $p : (\mathbb{C} - \{0\})^2 \rightarrow X(\pi_1(T^2))$ を、 $p := t|_{\Delta} \circ j^{-1}$ で定義する。さらに、部分集合 $V \subset (\mathbb{C} - \{0\})^2$ に対し、 $cl(V)$ で V の $\mathbb{C}^2$ における閉包を表す。

$$\begin{array}{ccccc} R(\pi_1(T^2)) \supset \Delta & \xrightarrow[\cong]{j} & (\mathbb{C} - \{0\})^2 & \xrightarrow{cl} & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow t & \nearrow t|_{\Delta} & \nearrow p & & \\ X(G_K) & \xrightarrow{\tilde{r}} & X(\pi_1(T^2)) & & \end{array}$$

すると、次が成り立つ。

事実 2 (CCGLS [4]). $cl(p^{-1}(Image(\tilde{r})))$ は、 $\mathbb{C}^2$ 内の *algebraic set* になる。さらに、各 *irreducible component* は $dim_{\mathbb{C}} \leq 1$ 。

このイデアル $I(cl(p^{-1}(Image(\tilde{r})))) \subset \mathbb{C}[L, M]$ の、次元 1 の成分に対応する部分イデアル $I(cl(p^{-1}(Image(\tilde{r}))))_{1-\dim}$ を考え（これは単項イデアルになる）、単項イデアル $\langle f \rangle$ をとってくる。（単項イデアルになることは、[8] の命題 1.13 を参照。）得られた f を、**結び目 K の A -多項式** と呼び、 $A_K(L, M)$ で表す。

性質などは、[5, 6] を参照。

3 Kauffman bracket skein module

ここでは、 M を compact orientable 3-manifold とする。

$\mathbb{C}[t, t^{-1}]\mathcal{L}_M$ を、 M 内の framed link¹ の isotopy class が生成する $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -module とする ($\emptyset$ も生成元として含めておく)。

このとき、 M の **Kauffman bracket skein module** $\mathcal{K}_t(M)$ を、

$$\mathcal{K}_t(M) := \mathbb{C}[t, t^{-1}]\mathcal{L}_M / S(M)$$

と定義する。ここで、 $S(M)$ は、次の Kauffman bracket skein relations² が生成する最小の $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -submodule とする。

Kauffman bracket skein relations

$$\bigotimes = t \bigcirc \bigcirc + t^{-1} \bigcirc \bigcirc$$

$$L \sqcup \bigcirc = (-t^2 - t^{-2})L$$

以降、簡単のため、Kauffmann bracket skein module を KBSM と略記する。

4 Result

ここで紹介する主結果は次である。

定理 1.

$$\langle A_K(L, M) \rangle = \sqrt{\left\langle \tilde{cl} \circ \iota(Ker \Pi) \right\rangle_{1-dim}}$$

が成立。ここで、 $1-dim$ は 1 次元成分に対応するイデアルをとることを示し、 $\sqrt{*}$ はイデアルの *radical* を表す。

定理の中の $\tilde{cl} : \mathbb{C}[L, L^{-1}, M, M^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[L, M]$ は、operator cl に対応する次のような写像である: $\mathbb{C}[L, L^{-1}, M, M^{-1}] \ni f = \sum_{i,j} f_{ij} L^i M^j$ に対し、 $\deg_L(f) := \min\{i \mid f_{ij} \neq 0\}, 0\}$, $\deg_M(f) := \min\{j \mid f_{ij} \neq 0\}, 0\}$ とするとき、

$$\tilde{cl}(f) := L^{-\deg_L(f)} M^{-\deg_M(f)} f.$$

Π は KBSM 間の写像で、あとで定義を与える。 ι は、次の図式を可換にする写像。図式中の p^* は、2 節の $p : (\mathbb{C} - \{0\})^2 \rightarrow X(\pi_1(T^2))$ の自然な dual として得られる写像で、 Φ_1 は後で定義を与える。

¹ M 内の framed link とは、いくつかの annulus の disjoint union の M への埋め込みの像を意味する。

² diagram の表し方については [2] を参照。

$$\begin{array}{ccccc}
& & & \mathbb{C}[L, L^{-1}, M, M^{-1}] & \xrightarrow{\tilde{cl}} & \mathbb{C}[L, M] \\
& & \nearrow p^* & & & \\
\chi(\pi_1(T^2)) & & & & & \\
\uparrow \Phi_1 & & \circlearrowleft & \nearrow \iota & & \\
\mathcal{K}_{-1}(S^3 - N(K)) & \xleftarrow{\Pi} & \mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) & & &
\end{array}$$

この節の残りでは、

- (1) KBSM $\mathcal{K}_{-1}(S^3 - N(K))$ 、 $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ の algebra 構造の導入と、写像 Π の定義。
- (2) 写像 Φ_1 の定義と、 Φ_1 の well-definedness の証明の概略。
- (3) 定理の証明の概略。

をすることにする。

4.1 KBSM の algebra 構造

KBSM $\mathcal{K}_{-1}(S^3 - N(K))$ には、framed link の disjoint union³ で積を定義する。 $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ には、 I 方向への framed link の重ねあわせで積を定義する。ここで、 $t = -1$ の特殊化をしているので、それぞれ可換環になっている⁴。従って、特殊化をしない一般の t では、ある意味で A-多項式の ‘非可換版’ が考えられることになる。(詳しくは [1] を参照。)

さて、 $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ に対し、 $H_1(T^2)$ の生成元 meridian、longitude を決めておく。これにより、

$$T^2 \times I \supset T^2 \times \{1\} \rightarrow \partial(S^3 - N(K))$$

の同一視が定まる。この写像により、自然に誘導される環準同型⁵を

$$\Pi : \mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) \rightarrow \mathcal{K}_{-1}(S^3 - N(K))$$

とする。

³元々2つの framed link は別々の $S^3 - K$ に埋め込まれたものであるが、2つの framed link の disjoint union とは、それらを同じ $S^3 - K$ に埋め込んだものを意味する。

⁴ $t = -1$ における Kauffman bracket skein relation を見ると、交点の符号は無視されることがわかる。これにより積が可換となることもわかる。

⁵ $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ の $\mathcal{K}_{-1}(S^3 - K)$ の empty link ϕ への作用だと思える。

4.2 Φ_1 の定義と well-definedness

ここでは、記号 N で、 $E(K) := S^3 - N(K)$ 、または、 $T^2 \times I$ を表すことにする。基本群 $\pi_1(N)$ の character variety $X(\pi_1(N))$ の関数環 $\chi(\pi_1(N))$ を考える。

まず、 $\mathcal{K}_{-1}(N) \ni K$: framed knot に対し、 K に適当な向きを入れ、それと (向きも込めて) freely homotopic な $\gamma \in \pi_1(N)$ を選ぶことにより、 $t_K : X(\pi_1(N)) \rightarrow \mathbb{C}$ を、 $t_K(\chi_\rho) := t_\gamma(\rho) (= \text{trace}(\rho(\gamma)))$ で定義する。ここで、 χ_ρ は ρ の character。よって、 $t_K \in \chi(\pi_1(N))$ とみなせる。ここで、 $A \in SL_2\mathbb{C}$ に対し、

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(A^{-1})$$

が成り立つので、 t_K は K の向きの取り方によらないことに注意する。さて、

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{K}_{-1}(N) \rightarrow \chi(\pi_1(N))$$

を、まず framed knot 上で $K \mapsto -t_K$ で定義し、一般の framed link に対しては、algebra の準同型として拡張する。つまり、 n 成分の framed link $L = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_n$ に対し、

$$\tilde{\Phi}(L) := \prod_{i=1}^n \tilde{\Phi}(K_i)$$

で定義する。このとき、次のことが示されている。

定理 2 (Bullock [3]). $\tilde{\Phi} : \mathcal{K}_{-1}(N) \rightarrow \chi(\pi_1(N))$ は *well-defined* で、全射 algebra 準同型。さらに、algebra 同型

$$\Phi : \mathcal{K}_{-1}(N)/\sqrt{0} \rightarrow \chi(\pi_1(N))/\sqrt{0}$$

を誘導する。ここで、 $\sqrt{0}$ は *nil-radical*。

ここで、 $N = T^2 \times I$ のときは、 $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ も、 $\chi(\pi_1(T^2 \times I))$ も、自明な nil-radical を持つので、algebra 同型写像

$$\Phi_1 : \mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) \rightarrow \chi(\pi_1(T^2 \times I))$$

が得られることになる。

定理 2 の *well-definedness* の証明の概略。KBSM $\mathcal{K}_{-1}(N)$ の定義より、 $\forall \chi_\rho \in X(\pi_1(N))$ に対し、

$$\tilde{\Phi}(L + L_0 + L_\infty)(\chi_\rho) = 0, \quad \tilde{\Phi}(\bigcirc + 2)(\chi_\rho) = 0$$

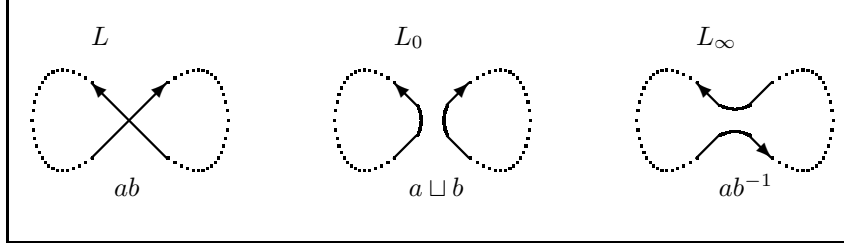
を示せば良い。ここで、 L 、 L_0 、 L_∞ は、局所的に Kauffman bracket skein relation を実現する framed links。

まず、すぐわかるように、

$$\tilde{\Phi}(\bigcirc + 2)(\chi_\rho) = \tilde{\Phi}(\bigcirc)(\chi_\rho) + 2\tilde{\Phi}(\emptyset)(\chi_\rho) = -\text{trace}(\rho(e)) + 2 = 0$$

が成り立つ。

次に、図のように、 L に対応する $\pi_1(N)$ の元⁶を ab とすると、 L_0 、 L_∞ に対応する元は、それぞれ、 $a \sqcup b$ 、 ab^{-1} となる。



簡単のため、 $\rho(a) =: A$ 、 $\rho(b) =: B$ とすると、

$$\begin{aligned} & \tilde{\Phi}(L + L_0 + L_\infty)(\chi_\rho) \\ &= \tilde{\Phi}(L)(\chi_\rho) + \tilde{\Phi}(L_0)(\chi_\rho) + \tilde{\Phi}(L_\infty)(\chi_\rho) \\ &= (-t_{ab}(\chi_\rho)) + (-t_a(\chi_\rho))(-t_b(\chi_\rho)) + (-t_{ab^{-1}}(\chi_\rho)) \\ &= -t_{ab}(\chi_\rho) + t_a(\chi_\rho)t_b(\chi_\rho) - t_{ab^{-1}}(\chi_\rho) \\ &= -\text{trace}(\rho(a)\rho(b)) + \text{trace}(\rho(a))\text{trace}(\rho(b)) - \text{trace}(\rho(a)\rho(b)^{-1}) \\ &= -\text{trace}(AB) + \text{trace}(A)\text{trace}(B) - \text{trace}(AB^{-1}) \end{aligned}$$

となるが、これは **trace identity** より、0 となる。 $\square$

4.3 定理 1 の証明の概略

関数環と character variety の双対性によって、上の系列から、自然に下の系列が誘導される。

$$\begin{array}{ccccccc} X(\pi_1(E(K))) & \xrightarrow{\tilde{r}} & X(\pi_1(T^2)) & \xleftarrow{p} & (\mathbb{C} - \{0\})^2 & \xrightarrow{cl} & \mathbb{C}^2 \\ \chi(\pi_1(E(K))) & \xleftarrow{\tilde{r}^*} & \chi(\pi_1(T^2)) & \xrightarrow{p^*} & \mathbb{C}[L, L^{-1}, M, M^{-1}] & \xrightarrow{\tilde{cl}} & \mathbb{C}[L, M] \end{array}$$

例えば、 $\tilde{r}$ の dual map $\tilde{r}^*$ は

$$\tilde{r}^*(f)(x) := f(\tilde{r}(x)) \text{ for } x \in X(\pi_1(E(K))), f \in \chi(\pi_1(T^2))$$

で定義される。

これにより、まず、

$$\langle A_K(L, M) \rangle = \sqrt{\left\langle \tilde{cl} \circ p^*(\text{Ker } \tilde{r}^*) \right\rangle_{1\text{-dim}}}$$

⁶ L に freely homotopic な $\pi_1(N)$ の元。4.2 を参照。

がわかる。すると、定理 1 は、次の事実から従う。

事実 3.

$$\sqrt{\ker \tilde{r}^*} = \ker \tilde{r}_\#^* = \Phi_1(\ker \Pi_\#) = \Phi_1(\sqrt{\ker \Pi})$$

が成立。ここで、 $\tilde{r}_\#^*$ 、 $\Pi_\#$ は、 $\tilde{r}^*$ 、 Π から自然に誘導される写像。

実際、定理 2 より、次の図式が可換になることがわかる。

$$\begin{array}{ccc} \chi(\pi_1(E(K))/\sqrt{0}) & \xleftarrow{\tilde{r}_\#^*} & \chi(\pi_1(T^2)) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \mathcal{K}_{-1}(E(K))/\sqrt{0} & \xleftarrow{\Pi_\#} & \mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) \end{array}$$

5 KBSM $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ の algebra 構造

実際に、定理 1 を用いて、A-多項式を計算しようとする場合は、だいたい $\Pi : \mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) \rightarrow \mathcal{K}_{-1}(S^3 - N(K))$ の kernel を計算すれば良い。というのは、 $\iota : \mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) \rightarrow \mathbb{C}[L, L^{-1}, M, M^{-1}]$ は、次のように記述されているからである。

まず、その定義域の $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ に関して、次の同一視がある。

命題 2.

$$\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{(p, q) \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \in \mathbb{Z}\}$$

ここで、 (p, q) は、 (p, q) -torus link on $T^2 \times \{1/2\}$ with torus framing⁷を表す。

さらに、右辺の集合の生成元系を取り替える。そのために、次式で帰納的に定義されるチェビシエフ多項式を用意する。

$$T_0(z) = 2, \quad T_1(z) = z, \quad T_{n+2}(z) = zT_{n+1}(z) - T_n(z)$$

さて、 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 、 $q \in \mathbb{Z}$ に対して、 $n = \gcd(p, q)$ としたとき、

$$(p, q)_T := T_n((p/n, q/n)) \in \text{span}_{\mathbb{C}} \{(p, q) \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \in \mathbb{Z}\}$$

とする。ただし、 $(0, 0)_T := (0, 0)$ 。ここで、 $\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I)$ の積の定義より、 $(p', q')^k$ は (p', q') -torus knot の k 重化を表している。

これにより、次が示される。

命題 3.

$$\mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{(p, q)_T \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \in \mathbb{Z}\}$$

⁷簡単に言うと、framed link を torus $T^2 \times \{1/2\}$ に射影したときの framing を考えている。([2] を参照。) blackboard framing とは異なることに注意。

この右辺の生成元系に対しては、写像 $\iota : \mathcal{K}_{-1}(T^2 \times I) \rightarrow \mathbb{C}[L, L^{-1}, M, M^{-1}]$ は、次のように記述される。

$$(p, q)_T \mapsto (-1)^{pq+p+q} (L^p M^q + L^{-p} M^{-q})$$

また、この集合上の積は

$$(p, q)_T * (r, s)_T := (-1)^{ps-qr} ((p+r, q+s)_T + (p-r, q-s)_T)$$

と計算される。(一般の t の場合 (非可換の場合) には [1] を参照。)

参考文献

- [1] C. Frohman, R. Gelca and W. Lofaro. *The A-polynomial from the non-commutative viewpoint*. Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 735–747.
- [2] F. Nagasato. *An approach to the A-polynomial of $(2, 2p+1)$ -torus knots from the Frohman-Gelca-Lofaro theory*. preprint, 2003. Available at <http://harold.math.kyushu-u.ac.jp/~fukky/a-poly.pdf>.
- [3] D. Bullock. *Rings of $\mathrm{SL}_2(C)$ -characters and the Kauffman bracket skein module*. Comment. Math. Helv. **72** (1997), no. 4, 521–542.
- [4] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long and P. B. Shalen. *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*. Invent. Math. **118** (1994), no. 1, 47–84.
- [5] D. Cooper and D. D. Long. *Remarks on the A-polynomial of a knot*. J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), no. 5, 609–628.
- [6] D. Cooper and D. D. Long. *Representation theory and the A-polynomial of a knot*. Knot theory and its applications. Chaos Solitons Fractals **9** (1998), no. 4-5, 749–763.
- [7] M. Culler and P. B. Shalen. *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*. Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 1, 109–146.
- [8] R. Hartshorne. Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.