# Character varietyの断面から誘導される代数多様体族と knot contact homology

長郷　文和

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
日本学術振興会特別研究員（PD）

E-mail: fukky@math.titech.ac.jp
URL: http://www.math.titech.ac.jp/~fukky

## はじめに

本稿では，背景や動機を視点とした，本研究の概略について述べさせて頂きます．尚，本研究に関する詳細な情報は，論文 [N3] (補遺 [N1, N2, GN, NY]) から得ることができます.

## 概要

この講演では, 結び目群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現, 特に, その表現の指標が成す集合 (character variety) のある断面を定義し，その構造を表現論的視点から解説する．更に，断面の幾何的性質を抽出することで得られる代数多様体[1] $\mathcal{F}(K)$ に注目する．$\mathcal{F}(K)$ は，その構造から，代数多様体の列

$$\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}^{(3)}(K) \to \mathcal{F}^{(2)}(K) \to \mathcal{F}^{(1)}(K) = \{0\} \subset \mathbb{C}$$

を誘導するが，特に，中間多様体 $\mathcal{F}^{(2)}(K)$ の双対空間[2]が abelian knot contact homology という $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群と同型な構造を持つ．このとき，$\mathcal{F}^{(2)}(K)$ の既約成分の個数は，その homology の Betti 数として解釈できることがわかる．これらの事実について解説する．

## 1　研究の背景と動機の概略

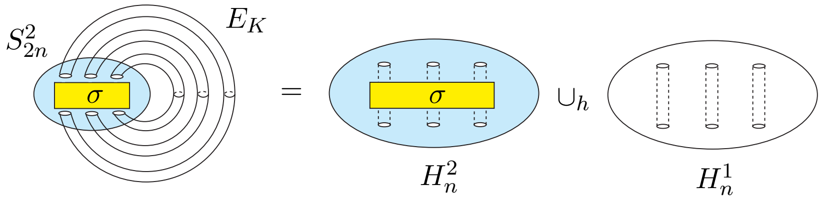
### 1.1　Casson-Lin invariant と $SU(2)$ 表現空間の断面：表現論的背景

整ホモロジー球面 $M$ (i.e., $H_1(M;\mathbb{Z})$=0 を満たす向き付け可能な連結閉 3 次元多様体) に対し，**Casson invariant** $\lambda(M)$ ([AM, S]) という整数値不変量が定義される．そのアイデアを簡単に説明すると，整ホモロジー球面 $M$ の Heegaard 分解 $M = H_n^1 \cup_g H_n^2$ を考え，それぞれのハンドル体 $H_n^i$ の基本群 (i.e. 自由群 $F_n := \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$) に対し，$SU(2)$ 表現空間[3] $R(H_n^i) := \mathrm{Hom}(F_n, SU(2))/\sim$ を構成する．ここで，$F := H_n^1 \cap H_n^2$ の基本群 (i.e. 自由群 $F_{2n}$) に対する表現空間 $R(F) := \mathrm{Hom}(F_{2n}, SU(2))/\sim$ を考えると，ハンドル体の貼り付け写像 $g$ から誘導される各包含写像 $g_i$: $R(H_n^1) \xrightarrow{g_1} R(F_{2n}) \xleftarrow{g_2} R(H_n^2)$ の像の共通部分 $g_1(R(H_n^1)) \cap$

[1] この講演では，広い意味での代数多様体，つまり代数的集合 (多項式族の共通零点集合) を指す.
[2] $\mathcal{F}(K)$ に付随した，ある商多項式環 $\mathcal{Q}^{(2)}(K)$．**nilradical** による商 $\mathcal{Q}^{(2)}(K)/\sqrt{0}$ は $\mathcal{F}(K)$ の**座標環**になる.
[3] 本稿では，$SU(2)$ 既約表現集合の $SO(3)$ の共役作用による商集合 (i.e., $SU(2)$ 既約表現の共役類集合) とする.

$g_2(R(H_n^2)) \subset R(F_{2n})$ は有限個の点から成ることがわかる．その各点には接空間の向きにより符号 "$+, -$" が定義されるが，この符号に付随した **algebraic intersection number** で $g_1(R(H_n^1)) \cap g_2(R(H_n^2))$ の点を数え上げることにより，Heegaard 分解に依らない整ホモロジー球面の整数値不変量 $\lambda : \{$ 整ホモロジー球面 $\} \to \mathbb{Z}$ を構成できる．これが Casson invariant のアイデアである．

Casson の構成を踏まえ，Xiao-Song Lin は，$S^3$ 内の結び目 $K$ の不変量，いわゆる **Casson-Lin invariant** $h(K)$ ([L1]) を構成した．具体的には，まず結び目の **braid 表示** $\sigma \in \mathcal{B}_n$ を固定し，$2n$-穴あき球面 $S_n^2$ により，結び目の外部空間 $E_K$ のハンドル体分解 $E_K := H_n^1 \cup_h H_n^2$ を与える．但し，genus には結び目の外部空間の境界が対応し，$S_n^2$ の外部 $H_n^1$ は $S^3$ への標準的な埋め込み，内部 $H_n^2$ は，結び目の braid 表示に対応する "絡まった"genus をもつハンドル体となる様な状況を考える：




ここで，$2n$-穴あき球面 $S_{2n}^2 := H_n^1 \cap H_n^2$ の基本群の表現空間[4] $R(S_{2n}^2) := \mathrm{Hom}(\pi_1(S_{2n}^2), SU(2))/\sim$ を用いることで，Casson invariant と同様，ハンドル体の貼り付け写像から誘導される $SU(2)$ 表現空間の包含写像 $h_i$: $R(H_n^1) \xrightarrow{h_1} R(S_{2n}^2) \xleftarrow{h_2} R(H_n^2)$ の像の共通部分 $h_1(R(H_n^1)) \cap h_2(R(H_n^2)) \subset R(S_{2n}^2)$ を構成できる．ここで Lin は，$SU(2)$ 表現において，各基本群の生成元である結び目の meridian[5] の像が **trace-free**，つまり trace が 0 な表現[6] に制限することで，**表現空間の断面** $R_0(H_n^1)$, $R_0(H_n^2)$, $R_0(S_{2n}^2)$ を考えた．このとき，共通部分 $h_1(R_0(H_n^1)) \cap h_2(R_0(H_n^2)) \subset R_0(S_{2n}^2)$ は有限個の点からなり，Casson invariant と同様，各点には符号 "$+, -$" が定義される．この符号に付随した algebraic intersection number により共通部分の点を数え上げることで，結び目の braid 表示によらない整数値不変量 $h : \{$ 結び目 $\} \to \mathbb{Z}$ を構成できる．これが Casson-Lin invariant である．

ここで，注目したいのが，Casson-Lin invariant は，結び目の符号数 (signature) の $\frac{1}{2}$ 倍になるという点である．このように，結び目群の $SU(2)$ trace-free 表現という特殊な表現の集合から，結び目外部空間の非自明な大域的性質が現れるという現象は，非コンパクト Lie 群 $SL(2, \mathbb{C})$ に対する結び目群の trace-free 表現の場合，どの様に反映されるのであろうか? これが，表現論的視点から見た本研究の動機である．

### 1.2 Kauffman bracket skein module(KBSM) と character variety：位相的背景

実は，本研究の原点は『KBSM を研究するための新たな手法の開発』という位置付けで始められた KBSM の研究 ([N3]) にある．D. Bullock による **trace identity** と **Kauffman bracket skein relation** の対応付け ([B, PS]) により，**trace の基本分解** (定義 2.1) という代数操作が，skein relation という位相操作に還元できるため，KBSM の研究が character variety の研究に応用できる．(KBSM に由来するより詳細な背景につきましては，本講演・本稿の構成上の都合により，割愛させて頂きます．詳しくは [N3] をご参照下さい.)

---

[4] Casson invariant 同様，$SU(2)$ 既約表現の共役類空間とする．
[5] 即ち，$H_n^i$ の longitude，または $S_{2n}^2$ の境界．
[6] このような表現を **trace-free 表現**という．このとき，$h_2$ は本質的に braid 群の **Magnus 表現** ([M]) に対応している．

## 2 $SL(2,\mathbb{C})$-character vaiety の断面 $S_0(K)$ とその性質

このSectionでは，表題にあるcharacter varietyの断面を定義し，その性質を述べる．Casson invariantやCasson-Lin invariantでは，$SU(2)$表現の共役類を考えたが，本研究では，$SL(2,\mathbb{C})$表現の指標集合 (character variety) について考える．

### 2.1 $SL(2,\mathbb{C})$-character variety$X(G)$ と trace-free な断面 $S_0(K)$

以降では，有限生成有限表示群 $G$ の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現 (i.e., 群準同型) を考える．$G$ の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現全体の集合を $\mathrm{Hom}(G, SL(2,\mathbb{C}))$ と表す．表現 $\rho: G \to SL(2,\mathbb{C})$ の指標 $\chi_\rho$ を $\chi_\rho(g) := \mathrm{trace}(\rho(g))$ で定義し，$G$ の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現の指標全体の集合を $X(G)$ と書く：

$$X(G) := \{\chi_\rho \mid \rho \in \mathrm{Hom}(G, SL(2,\mathbb{C}))\}.$$

$X(G)$ は集合であるが，Culler-Shalen([CS]) により，ある複素空間 $\mathbb{C}^N$ 内の代数多様体と同一視できることが知られている．この同一視された代数多様体を同じ記号で $X(G)$ と書き，$G$ の character variety と呼ぶ．以降では，特に有限生成有限表示群として**結び目群** $G_K$，つまり結び目外部空間 $E_K := S^3 - N(K)$ の基本群 $\pi_1(E_K)$ を考える (但し $N(K)$ は結び目 $K \subset S^3$ の開管状近傍)．

**Example (character variety).** **trefoil** 結び目群 $G_{3_1} = \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} = 1\rangle$ に対する character variety は $X(G_{3_1}) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid (y+2)(y+x^2-1)\}$ と表される．実際，

- $$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(G_{3_1}, SL(2,\mathbb{C})) &\equiv \left\{(\rho(a),\rho(b)) \in SL(2,\mathbb{C})^2 \mid \rho(abab^{-1}a^{-1}b^{-1}) = \rho(1)\right\} \\ &= \left\{(A,B) \in SL(2,\mathbb{C})^2 \,\middle|\, ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}X(G_{3_1}) &= \{\chi_\rho \mid \rho \in \mathrm{Hom}(G_{3_1}, SL(2,\mathbb{C}))\} \\ &\equiv \left\{(\mathrm{trace}(A), \mathrm{trace}(AB^{-1})) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

ここで，$SL(2,\mathbb{C})$ における trace は次の性質を満たすことに注意する：

- $\mathrm{trace}(X^{-1}) = \mathrm{trace}(X),\ X \in SL(2,\mathbb{C})$.
- $\mathrm{trace}(Y^{-1}XY) = \mathrm{trace}(X),\ X, Y \in SL(2,\mathbb{C})$.
- $\boxed{\mathrm{trace}(XY) = \mathrm{trace}(X)\cdot\mathrm{trace}(Y) - \mathrm{trace}(XY^{-1})}$, $X, Y \in SL(2,\mathbb{C})$.

特に3番目の関係式を **trace identity** または **Cayley-Hamilton identity** という．実は，trace identity を含む上記3つの関係式から，$A$, $B$ の任意の word[7]の trace は，$\mathrm{trace}(A)$ と $\mathrm{trace}(AB^{-1})$ の多項式で表される[8]．例えば，$x := -\mathrm{trace}(A)$, $y := -\mathrm{trace}(AB^{-1})$ とするとき，

$$\mathrm{trace}(ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1}) = -y^3 - 2x^2y^2 - (x^4 + 2x^2 - 3)y - 2x^4 + 4x^2 \tag{1}$$

となる．ここで，$2 - \mathrm{trace}(ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1}) = (y+2)(y+x^2-1)^2$ から[9]，上記を得る：

$$X(G_{3_1}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid (y+2)(y+x^2-1) = 0\right\}$$

[7] 普通の意味での word．例えば $A^3B^5AB^{-2}A^2$ など．
[8] González Acuña-Montesinos による有限生成有限表示群に対しての強力な結果 ([GM]) により保証される．
[9] 一般には，結び目群の関係式だけから $X(G_K)$ の定義多項式が導かれるとは限らない (注意 3.2 参照)

**定義 2.1 (trace の基本分解)** 上記操作 (1) の様に，trace identity 等により，表現の trace を基本的な trace の多項式に分解する操作を，**trace の基本分解**という．

**定義 2.2** 結び目群 $G_K$ に対し，その character variety $X(G_K)$ の断面 $S_0(K)$ とは，trace-free 表現の指標全体からなる $X(G_K)$ の部分集合，またはそれに対応する代数多様体を意味する：

$$S_0(K) := \{x_\rho \in X(G_K) \mid \chi_\rho(\mu) = 0\} \subset X(G_K).$$

## 2.2 $S_0(K)$ の特徴

断面 $S_0(K)$ を構成する点に関しては，少なくとも次の性質が成り立つ：

1. 任意の結び目 $K$ に対し，$S_0(K) \neq \phi$．(可換表現の指標から[10])
2. $S_0(K)$ には少なくとも $\frac{|\Delta_K(-1)|-1}{2} + 1$ 個の点が存在する．(Section 2.2.1 参照)
3. **small** な結び目 $K$ に対し，$\dim_{\mathbb{C}}(S_0(K))$=0．(small ⇒ **meridionally small** より)
4. **合成結び目** $K = K_1 \# K_2$ (但し $|\Delta_{K_i}(-1)| \neq 1$, $i = 1, 2$) に対し，$\dim_{\mathbb{C}}(S_0(K)) \geq 1$． ([K], p.816 の 11 行目参照)．但し $\Delta_K(t)$ は $K$ の **Alexander 多項式**.
5. small な結び目 $K$ に対し，$S_0(K)$ には少なくとも $\deg_l(A_K(m,l)) + 1$ 個の点が存在する ([N3] 参照)．但し $A_K(m,l)$ は結び目 $K$ の $l-1$ で割られた **A-多項式** ([CCGLS]).

本稿では，性質 2 についてのみ解説する．

### 2.2.1 性質 2 について：metabelian 表現

$S_0(K)$ を構成している trace-free 表現の指標の代表格といえるのが，**metabelian 表現**である．

**定義 2.3 (metabelian 表現)** 群 $G$ の表現 $\rho : G \to SL(2,\mathbb{C})$ で，交換子群 $[G,G]$ の $\rho$ による像 $\rho([G,G])$ が $SL(2,\mathbb{C})$ の可換部分群になるものを，**metabelian** 表現という．

従って，可換表現は metabelian であるので，非可換，特に既約 metabelian 表現に注目する．結び目群に対しては，次の興味深い性質を持つ．$\mu$, $\lambda$ を $K$ の標準的な meridian，longitude に代表される $G_K$ の元とする．

**命題 2.4 ([N1])** 結び目群 $G_K$ の任意の既約 metabelian 表現 $\rho : G_K \to SL(2,\mathbb{C})$ は次を満たす．

$$\mathrm{trace}(\rho(\mu)) = 0,\ \mathrm{trace}(\rho(\lambda)) = 2.$$

これにより，全ての既約 metabelian 表現の指標は，断面 $S_0(K)$ に含まれることがわかる[11]．その個数は有限個で，次のように具体的に記述できる．

**命題 2.5 ([N1]([K, L2] の $SL(2,\mathbb{C})$-version))** 結び目群 $G_K$ の既約 metabelian 指標の個数は $\frac{|\Delta_K(-1)|-1}{2}$ である．

命題 2.5 により，性質 2 が保証される．既約 metabelian 表現については，更に必要十分条件もわかる．まず，結び目群 $G_K$ の可換化 $\alpha_t : G_K \to \langle t \rangle$ を経由することで，1 次元表現 $\alpha_{-1} : G_K \to \mathbb{C}$, $\alpha_{-1}(\mu) = -1$ を構成する．$\alpha_{-1}$ は表現の **involution** $\iota : R(G_K) \to R(G_K)$, $\iota(\rho)(g) := \alpha_{-1}(g) \cdot \rho(g)$ $(g \in G_K)$, 従って character variety 上の involution $\iota : X(G_K) \to X(G_K)$, $\iota(\chi_\rho) := \chi_{\iota(\rho)}$ を自然に誘導する．

[10] 可換表現 $\rho_{\mathrm{ab}} : G_K \to H_1(E_K) \to SL(2,\mathbb{C})$, $\rho_{\mathrm{ab}}(\mu) = \mathrm{diag}(\sqrt{-1}, -\sqrt{-1})$ の指標が常に含まれる (但し $\mu$ は結び目 $K$ の meridian).

[11] 可約な場合，命題 2.4 を満たさないものが存在する．

**命題 2.6 ([NY])** 任意の結び目 $K$ と，その既約表現 $\rho : G_K \to SL(2,\mathbb{C})$ に対し，次は同値[12]：
(1) $\rho$ は metabelian
(2) 任意の元 $g \in G_K$ に対し，$\mathrm{trace}(\iota(\rho)(g)) = \mathrm{trace}(\rho(g))$ (つまり $\iota(\chi_\rho) = \chi_\rho$)

# 3　断面 $S_0(K)$ の効率的評価：代数多様体 $\mathcal{F}(K)$ の構成

断面 $S_0(K)$ の定義多項式は，結び目群の表示に依存するため，$S_0(K)$ 自身を不変量として扱うのは効率的ではない．そこで，Casson-Lin invariant に倣い，既約成分の個数に注目する．

**定義 3.1 (norm)** 代数多様体 $V$ に対し，その **norm** $||V||$ を ($V$ の既約成分の個数)$-1$ とする．

任意の結び目 $K$ に対し $S_0(K) \neq \phi$ であるため，norm $||\cdot||$ により，結び目の非負整数値関数

$$s_0 : \{\text{結び目}\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0},\ s_0(K) := ||S_0(K)||.$$

が定義できる．つまり norm は，Casson-Lin invariant とは異なり，単純に断面の既約成分 ($\dim_{\mathbb{C}}(S_0(K)) = 0$ の場合は点) の個数を **geometric intersection number** で数え上げていると解釈できる．

**注意 3.2** Section 2.1 の例では，$X(G_{3_1})$ の定義多項式は，結び目群の関係式のみから導かれたが，一般に，生成元の個数 $n$ が 3 以上の群 $G_K$ に対する $X(G_K)$ は，結び目群の関係式から得られる定義多項式 (幾何的定義多項式) 以外に，結び目外部空間の位相とは全く無関係な定義多項式 (非幾何的定義多項式) を持つ．これは，自由群 $F_n(n \geq 3)$ の character variety$X(F_n)$ に，trace indentity から導かれる非自明な定義多項式が存在するためである．(González Acuña-Montesinos([GM]) により，$X(F_n)$ $(n \geq 1)$ の (弱い意味での) 定義多項式は決定されている.)

注意 3.2 のように，$G_K$ の生成元が増えるほど，$X(G_K)$，従って $S_0(K)$ の定義多項式は複雑になり，その評価が飛躍的に難しくなる．そこで Section 3.1 では，結び目 $K$ の braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ を固定することで，$X(G_K)$ の非幾何的定義多項式を排除し，幾何的定義多項式 ($\sigma$ に付随した形で記述) から生成される多項式族 (ideal) $\mathcal{SL}(\sigma)$ を導入する．

## 3.1　幾何的定義多項式を抽出する：ideal $\mathcal{SL}(\sigma)$ の導入

まず，結び目 $K$ の結び目群 $G_K$ は，$K$ の braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ に対し，次のように表される：

$$G_K = \pi_1(H_n^1) *_{\pi(S_{2n}^2)} \pi_1(H_n^2) = \langle g_1, \cdots, g_n \mid g_i = \sigma(g_i)\ (i = 1, \cdots, n)\rangle.$$

但し，braid $\sigma$ の自由群 $\pi_1(H_n^2) = \langle g_1, \cdots, g_n\rangle$ への作用は，次のように定義される：

$$\sigma_i(g_j) := \begin{cases} g_i^{-1} \cdot g_{i+1} \cdot g_i, & \text{if } j = i \\ g_{p_{i,i+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \sigma_i^{-1}(g_j) := \begin{cases} g_{i+1} \cdot g_i \cdot g_{i+1}^{-1}, & \text{if } j = i+1 \\ g_{p_{i,i+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(但し $p_{i,i+1}$ は $i$, $i+1$ の置換.) ここで，関係式 $x_i = \sigma(x_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ のから得られる幾何的定義多項式は，この $\sigma$-作用を用いることで，次のように形式的に構成される $f_\sigma$，$g_{\sigma, A_m}$ により記述される．まず，**trace 関数** $t_g : X(G_K) \to \mathbb{C}$, $t_g(\chi_\rho) := \mathrm{trace}(\rho(g))$ $(g \in G_K)$ に対し，$x_{ij} := -t_{g_i g_j}(1 \leq i < j \leq n)$, $x_{ijk} := -t_{g_i g_j g_k}$ $(1 \leq i < j < k \leq n)$, $h_i := -t_{g_i *}(1 \leq i \leq n$. 但し $*$ は不定元) とし，$\mathcal{C}_n^{(3)} := \mathbb{C}[\{x_{ij}\}_{1 \leq i < i \leq n}, \{x_{ijk}\}_{1 \leq i < j < k \leq n}]$ とおく．このとき $\mathcal{C}_n^{(3)}$-加群 $\mathcal{A}_n := \sum_{i=2}^{3} (\oplus_{i=1}^{n} \mathcal{C}_n^{(3)} h_i)^{\otimes i}$ を考える (但し $\otimes$ は $\mathcal{C}_n^{(3)}$ 上の tensor 積).

[12] この命題は SU(2) 表現についても成り立つ．

- $h_j$ に対し，作用 $f_{\sigma_i}$，$f_{\sigma_i^{-1}}$ を次のように定義する：

$$f_{\sigma_i}(h_j) := \begin{cases} x_{i,i+1}h_i - h_{i+1}, & \text{if } j = i \\ h_{p_{ii+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad f_{\sigma_i^{-1}}(h_j) := \begin{cases} x_{i,i+1}h_{i+1} - h_i, & \text{if } j = i+1 \\ h_{p_{ii+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_m}) := f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_{i_m})$.

- $\mathcal{A}_n$ 上の $\mathcal{C}_n^{(3)}$-線形写像 $c : \mathcal{A}_n \to \mathcal{C}_n^{(3)}$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} c(h_{i_1} \otimes h_{i_2}) &:= \begin{cases} x_{i_1 i_2} & \text{if } i_1 < i_2 \\ 2 & \text{if } i_1 = i_2 \\ x_{i_2 i_1} & \text{if } i_1 > i_2 \end{cases} \\ c(h_{i_1} \otimes h_{i_2} \otimes h_{i_3}) &:= \operatorname{sign}(\tau) x_{i_{\tau(1)} i_{\tau(2)} i_{\tau(3)}} \end{aligned}$$

  但し，$\tau$ は $i_{\tau(1)} \le i_{\tau(2)} \le i_{\tau(3)}$ を満たす 3 次対称群の元.

- (1) $f_{\sigma_i^{\pm 1}}(\sum_k s_k h_k) := \sum_k f_{\sigma_i^{\pm 1}}(s_k) f_\sigma(h_k)$ $(s_k \in \mathcal{C}_n^{(3)})$：ねじれ $\mathcal{C}_n^{(3)}$-線形拡張.
  (2) 多項式 $s(x_{i_1 i_2}, x_{i_1 i_2 i_3}) \in \mathcal{C}_n^{(3)}$ に対し，

$$f_{\sigma_i^{\pm 1}}(s(x_{i_1 i_2}, x_{i_1 i_2 i_3})) := s(f_{\sigma_i^{\pm 1}}(x_{i_1 i_2}), f_{\sigma_i^{\pm 1}}(x_{i_1 i_2 i_3}))：f_{\sigma_i^{\pm 1}} \text{ の } \mathcal{C}_n^{(3)} \text{ への拡張}.$$

  (3) $f_{\sigma_i^{\pm 1}}(x_{i_1 \cdots i_m}) := c \circ f_{\sigma_i^{\pm}}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_m})$：$x_{i_1 \cdots i_m}$ に対する $f_{\sigma_i^{\pm 1}}$ の作用.
  (4) $f_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} := f_{\gamma_1} \circ f_{\gamma_2}$ $(\gamma_i \in \mathcal{B}_n)$：一般の braid への拡張.
  により $\mathcal{A}_n$ 上の作用 $f_\sigma$ を定義する[13].

- 真部分集合 $A_m \subset \{1, \cdots, m\}$ に対し，$\epsilon_{A_m}(i) := \begin{cases} 1, & \text{if } i \notin A_m \\ 0, & \text{if } i \in A_m \end{cases}$ を定義する.

- $g_{\sigma, A_m}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_m}) := f_\sigma^{\epsilon_{A_m}(1)}(h_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f_\sigma^{\epsilon_{A_m}(m)}(h_{i_m})$.

**定義 3.3 (ideal $\mathcal{SL}(\sigma)$)** braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ に対し，$\mathcal{SL}(\sigma)$ を以下の多項式で生成される $\mathcal{C}_n^{(3)}$ の ideal とする：

$$\begin{aligned} c(f_\sigma(h_i \otimes h_j) - h_i \otimes h_j), &\qquad (1 \le i < j \le n) \\ c(f_\sigma(h_i \otimes h_j \otimes h_k) - h_i \otimes h_j \otimes h_k), &\qquad (1 \le i < j < k \le n) \\ c(g_{\sigma, A_2}(h_i \otimes h_j) - h_i \otimes h_j), &\qquad (1 \le i \le j \le n) \\ c(g_{\sigma, A_3}(h_i \otimes h_j \otimes h_k) - h_i \otimes h_j \otimes h_k), &\qquad (1 \le i \le j \le k \le n) \\ \text{一般 6 角関係式}, &\qquad (\text{if } n \ge 3) \end{aligned}$$

ここで，一般 6 角関係式とは，ある特別な非幾何的定義多項式の一種である ([N3] 参照)．実際，一般 6 角関係式以外の生成元 $c(f_\sigma(h) - h)$，$c(g_{\sigma, A_m}(h) - h)$ が $X(G_K)$ の幾何的定義多項式を実現していることが確認できる．この様に定義された代数多様体 $\mathcal{F}(\sigma)$ は，braid 表示の取り方に依らない[14].

---

[13] $\Phi_n : \mathcal{B}_n \to \operatorname{Aut}(\mathcal{C}_n^{(2)})$, $\Phi_n(\sigma) := f_\sigma$ は braid 群の Magnus 表現に対応している.

[14] 実は，$\mathcal{SL}(\sigma)$ に含まれる一般 6 角関係式を排除しても，その共通零点は Markov move 不変になるが，一般 6 角関係式を入れることで，$S_0(K)$ の持つ重要な幾何構造が $\mathcal{F}(K)$ に反映されるため，一般 6 角関係式は排除しない．この意味で，一般 6 角関係式は幾何的定義多項式とも見れる.

**定義 3.4 (Markov move)** Braid 群 $\mathcal{B}_n$ の元 $\sigma$ に対し，次の 2 種類の操作

$$\sigma \leftrightarrow \sigma_i^{\mp 1}\sigma\sigma_i^{\pm 1}\ (1 \leq i \leq n), \qquad \sigma \leftrightarrow \sigma\sigma_{n+1}^{\pm 1}.$$

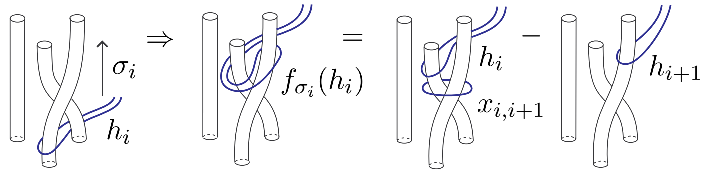
を Markov move という (前者をタイプ I，後者をタイプ II という).

**定理 3.5 (Markov move による不変性 [N3])** 結び目 $K$ の braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ に対し，代数多様体 $\mathcal{F}(\sigma)$, $\mathcal{F}(\sigma_i^{\mp 1}\sigma\sigma_i^{\pm 1})$, $\mathcal{F}(\sigma\sigma_{n+1}^{\pm 1})$ は同型[15]である.

結び目 $K$ の任意の二つの braid 表示は，有限回の Markov move で互いに移り合うため，定理 3.5 は，$\mathcal{F}(\sigma)$ が braid 表示に依らない，つまり結び目不変量であることを示している．$K$ のある braid 表示 $\sigma$ に対し $\mathcal{F}(K) := \mathcal{F}(\sigma)$ と定義する．特に $\mathcal{F}(K)$ の norm により，非負整数値[16]不変量 $f : \{\text{ 結び目 }\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$f(K) := ||\mathcal{F}(K)||$ が定義できる.

## 4 $\mathcal{F}(K)$ の幾何的側面

$\mathcal{SL}(\sigma)$ $(\sigma \in \mathcal{B}_n)$ を生成する $f_\sigma(h_i)$ は，次のような loop の局所操作[17]に対応する：




この性質により，$c \circ f_\sigma(h_i \otimes h_j)$, $c \circ g_{\sigma,A_2}(h_i \otimes h_j)$ は共に $\mathcal{C}_n^{(2)} := \mathbb{C}[\{x_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}]$ の元となることがわかる．つまり，商多項式環 $\mathcal{C}_n^{(3)}/\mathcal{SL}(\sigma)$ は，次の分解 (filtration) $\mathcal{Q}^{(d)}(\sigma) := \mathcal{C}_n^{(d)}/\mathcal{SL}^{(d)}(\sigma)$ を誘導する：

$$\mathcal{Q}(\sigma) = \mathcal{Q}^{(3)}(\sigma) \supset \mathcal{Q}^{(2)}(\sigma) \supset \mathcal{Q}^{(1)}(\sigma) = \mathbb{C}.$$

但し $\mathcal{C}_n^{(1)} := \mathbb{C}$ とし，$\mathcal{SL}^{(d)}(\sigma)$ は，$\mathcal{SL}(\sigma)$ の生成元のうち，$\mathcal{C}_n^{(d)}$ の元であるものが生成する $\mathcal{C}_n^{(d)}$ の ideal とする．この双対 (i.e., 各 $\mathcal{SL}^{(d)}(\sigma)$ の共通零点) を取ることにより，次の列を得る.

$$\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}^{(3)}(\sigma) \xrightarrow{x_{ij}\text{-射影}} \mathcal{F}^{(2)}(\sigma) \xrightarrow{0\text{-射影}} \mathcal{F}^{(1)}(\sigma) = \{0\} \subset \mathbb{C}$$

各代数多様体 $\mathcal{F}^{(d)}(\sigma)$ は結び目の不変量となることがわかる．$\mathcal{F}^{(d)}(K) := \mathcal{F}^{(d)}(\sigma)$ と定義し，norm $||\cdot||$ により，非負整数値関数[18] $f_d(K) := ||\mathcal{F}^{(d)}(K)||$ を定義する．(定義から，任意の結び目 $K$ に対し $f_1(K) = 0$.) これにより，$s_0(K)$ の挟み撃ち評価式を得ることができる (命題 4.1，付録 $A$ 参照).

**命題 4.1** 少なくとも次の性質が成り立つ：

1. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{(3)}(K)) = 0$ ならば，$f_3(K) \geq s_0(K) \geq (|\Delta_K(-1)| - 1)/2$. (性質 2 の系)
2. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{(3)}(K)) = 0$ を満たす small な結び目 $K$ に対し，$f_3(K) \geq s_0(K) \geq \deg_l(A_K(m,l))$. (性質 5 の系)
3. **2-bridge knot** $K = S(p,q)$ に対し，$\mathcal{F}^{(d)}(K) \cong S_0(K)$, $f_d(K) = \frac{p-1}{2}$ $(d = 2, 3)$. ([N4])
4. 合成結び目 $K = K_1 \# K_2$ (但し $|\Delta_{K_i}(-1)| \neq 1$, $d = 1, 2$) に対し，$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{(3)}(K)) \geq 1$. (性質 4 の系)

---

[15]代数多様体 $V_1$，$V_2$ が同型 ($\cong$) とは，全単射多項式写像 $p : V_1 \to V_2$ が存在するときをいう.
[16]定義から (必要なら座標変換により) 常に $\mathcal{F}(K) \supset S_0(K) \neq \phi$ となるため.
[17]meridional knot を全て 0 に退化させた場合の $t = -1$ における KBSM の skein relation に対応する.
[18]任意の結び目 $K$ に対し，$\mathcal{F}^{(d)}(K)$ $(i = 1, 2, 3)$ が空ではないことによる.

## 5 $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ の代数的側面：abelian knot contact homology

まず，結び目 $K$ の braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ を固定し，$n$ に付随した $\mathbb{Z}$ 上の次数付き tensor 代数

$$\mathbb{Z}\langle \overbrace{a_{ij}}^{\deg 0}, \overbrace{b_{ij}, c_{ij}}^{\deg 1}, \overbrace{d_{ij}, e_i}^{\deg 2} \rangle \ (1 \le i < j \le n)$$

に交換関係式 $v \otimes w = (-1)^{\deg v \deg w} w \otimes v$ を導入した商環 $\mathcal{T}_n$ を考える．$\mathcal{T}_n$ は，生成元の次数により，filtration $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^{(2)} \supset \mathcal{T}_n^{(1)} \supset \mathcal{T}_n^{(0)} = \mathbb{Z}[a_{ij}]$ (center：多項式環) を持つ．但し $\mathcal{T}_n^{(i)}$ は 0 次から $i$ 次までの元が生成する $\mathcal{T}_n$ の部分環とする．ここで，$\sigma$ に付随した以下の条件を満たす differential $\partial_\sigma^{(i)} : \mathcal{T}_n^{(i)} \to \mathcal{T}_n^{(i-1)}$ $(i = 0, 1, 2)$ が具体的に定義される[19]：

1. $\partial_\sigma^{(i)}$ は次数を 1 下げる．
2. Leibniz rule：$\partial_\sigma^{(i)}(vw) = \left(\partial_\sigma^{(i)} v\right) w + (-1)^{\deg v} v \left(\partial_\sigma^{(i)} w\right)$ を満たす．
3. $\partial_\sigma^{(i-1)} \circ \partial_\sigma^{(i)} = 0$.

(詳細は [Ng] を参照.) 特に，条件 3 により homology が定義される．

**定義 5.1 (braid に対する contact homology [Ng])** braid $\sigma$ に対し，chain complex

$$0 \xrightarrow{\partial_\sigma^{(3)}} \mathcal{T}_n^{(2)} \xrightarrow{\partial_\sigma^{(2)}} \mathcal{T}_n^{(1)} \xrightarrow{\partial_\sigma^{(1)}} \mathcal{T}_n^{(0)} \xrightarrow{\partial_\sigma^{(0)}} 0$$

から定義される $i$ 次の homology $HC_i^{\mathrm{ab}}(\sigma)$ $(i = 0, 1, 2)$ を，braid $\sigma$ に対する $i$ 次の abelian contact homology という．

実は，Markov move によって $HC_i^{\mathrm{ab}}(\sigma)$ は (環同型を法として) 不変である ([Ng])．$HC_i^{\mathrm{ab}}(K)$ を $HC_i^{\mathrm{ab}}(\sigma)$ で定義し，結び目 $K$ の $i$ 次の **abelian knot contact homology** という．ここで，環同型 $\psi : \mathcal{C}_n^{(2)} \to \mathbb{Z}[a_{ij}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[a_{ij}]$, $\psi(x_{ij}) := -a_{ij}$ を考えると，$\psi$ は環同型 $\widetilde{\psi} : \mathcal{Q}^{(2)}(\sigma) \to HC_0^{\mathrm{ab}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ を誘導する．

**定理 5.2 ([N3])** $S^3$ 内の任意の結び目 $K$ とその braid 表示 $\sigma$ に対し，$\mathcal{Q}^{(2)}(\sigma)$ と $HC_0^{\mathrm{ab}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は環同型である[20].

定理 5.2, 命題 4.1(性質 3) により，$K$ が 2-bridge knot の場合，$HC_0^{\mathrm{ab}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は $S_0(K)$ の座標環であることがわかる．一般の結び目に対しては，$HC_0^{\mathrm{ab}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は少なくとも $S_0(K)$ の座標環の一部の情報を反映した対象となってる．

また，$\mathcal{F}^{(2)}(K)$ が 0 次元のとき，$\mathcal{F}^{(2)}(K)$ の点の個数は，$HC_0^{\mathrm{ab}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の Betti 数となる．この議論は $\mathcal{Q}^{(3)}(\sigma)$ にも適用できる．つまり $\mathcal{Q}^{(3)}(\sigma)$ は，$\mathrm{Im}(\widetilde{\partial}_\sigma^{(1)}) = \mathcal{SL}^{(3)}(\sigma)$, $\mathrm{Ker}(\widetilde{\partial}_\sigma^{(0)}) = \mathcal{C}_n^{(3)}$ を満たす，ある chain complex $\cdots \xrightarrow{\widetilde{\partial}_\sigma^{(1)}} \mathcal{C}_n^{(3)} \xrightarrow{\widetilde{\partial}_\sigma^{(0)}} 0$ の 0 次の homology として捉えられる．従って，$\mathcal{F}^{(3)}(K)$ が 0 次元のとき，$\mathcal{F}^{(3)}(K)$ の既約成分の個数は，$\mathcal{Q}^{(3)}(\sigma)$ の Betti 数である[21].

このように $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ は，何らかの対象の 0 次の部分を捉えていると考えられ，より大きな枠組みでの $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ の研究が期待される．

---

[19] 本来 $\partial_\sigma^{(i)}$ は $\partial_\sigma : \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_n$ の $i$ 番目の filter への制限として定義される．条件 1,2,3 を満たす differential $\partial$ を持つ次数付き代数を **differential graded algebra(DGA)** という．対 $(\mathcal{T}_n, \partial)$ は DGA である．

[20] 特に $\mathcal{Q}^{(2)}(\sigma)$ は結び目の不変量となる．

[21] これらの現象は $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ のモデルとなった Casson-Lin invariant が『ある **Floer homology** の **Euler 数**として解釈できる』という事実に由来する性質であると考えられる．

## 謝辞

第 54 回トポロジーシンポジウムにおける講演の機会を与えて頂きました関係者の皆様に感謝申し上げます．また，本研究に関しまして，石川昌治先生をはじめ沢山の方々に，有益なコメントを頂きました．最後に，この研究を進めるにあたり，多大なコメントと励ましの言葉を下さり，そして今年 1 月に亡くなられた，カリフォルニア大学リバーサイド校の Xiao-Song Lin 先生に心より感謝致します.

## 参考文献

[AM] S. Akbulut and J. McCarthy: *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[B] D. Bullock: *Rings of $SL_2(\mathbb{C})$-characters and the Kauffman bracket skein module*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), 521–542.

[CCGLS] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long and P. Shalen: *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 47–84.

[CS] M. Culler and P. Shalen: *Varieties of group presentations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109–146.

[GN] R. Gelca and F. Nagasato: *Some results about the Kauffman bracket skein module of the twist knot exterior*, J. Knot Theory Ramifications **15**, 1095–1106.

[GM] F. González-Acuña and J.M. Montesinos: *On the character variety of group representations in $SL(2,\mathbb{C})$ and $PSL(2,\mathbb{C})$*, Math. Z., **214** (1993), 627–652.

[K] E. Klassen: *Representations of knot groups in $SU(2)$*, Trans. Am. Math. Soc. **326** (1991), 795–828.

[L1] X.-S. Lin: *A knot invariant via representation spaces*, J. Differential Geom. **35** (1992), 337–357.

[L2] X.-S. Lin: *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin., Engl. **17** (2001), 361–380.

[M] W. Magnus: *Ring of Fricke characters and automorphism group of free groups*, Math. Z. **170** (1980), 91–103.

[N1] F. Nagasato: *Finiteness of a section of the $SL(2,\mathbb{C})$-character variety of knot groups*, to appear, available at `http://www.math.titech.ac.jp/~fukky`.

[N2] F. Nagasato: *Topological aspects of the Chebyshev polynomials and the character varieties*, to appear, available at `http://www.math.titech.ac.jp/~fukky`.

[N3] F. Nagasato: *Algebraic varieties via a filtration of the KBSM and knot contact homology*, preprint, available at `http://www.math.titech.ac.jp/~fukky`.

[N4] F. Nagasato: in preparation, a draft on this research will be available at `http://www.math.titech.ac.jp/~fukky`.

[NY] F. Nagasato and Y. Yamaguchi: in preparation, a draft on this research will be available at `http://www.math.titech.ac.jp/~fukky`.

[Ng] L. Ng: *Knot and braid invariants from contact homology I*, Geom. Topol. **9** (2005), 247–297.

[PS] J.H. Przytycki and A.S. Sikora: *On skein algebras and $Sl_2(\mathbb{C})$-character varieties*, Topology **39** (2000), 115–148.

[S] N. Saveliev: *Lectures on the topology of 3-manifolds: an introduction to the Casson invariant*, de Gruyter textbook, Walter de Gruyter, Berlin, 1999.

## A 付録：結び目不変量比較一覧表

* Montesinos-3 は Montesinos knot with length 3

| $K$ | $\dim(\mathcal{F}^{(3)})$ | $\dim(\mathcal{F}^{(2)})$ | $f_3$ | $f_2$ | $\lvert\Delta_K(-1)\rvert$ | $\deg_l(A_K(m,l))$ | type |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | trivial |
| $3_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | $S(3,1)$ |
| $4_1$ | 0 | 0 | 2 | 2 | 5 | 2 | $S(5,3)$ |
| $5_1$ | 0 | 0 | 2 | 2 | 5 | 1 | $S(5,1)$ |
| $5_2$ | 0 | 0 | 3 | 3 | 7 | 3 | $S(7,3)$ |
| $6_1$ | 0 | 0 | 4 | 4 | 9 | 4 | $S(9,5)$ |
| $6_2$ | 0 | 0 | 5 | 5 | 11 | 5 | $S(11,3)$ |
| $6_3$ | 0 | 0 | 6 | 6 | 13 | 6 | $S(13,5)$ |
| $7_1$ | 0 | 0 | 3 | 3 | 7 | 1 | $S(7,1)$ |
| $7_2$ | 0 | 0 | 5 | 5 | 11 | 5 | $S(11,5)$ |
| $7_3$ | 0 | 0 | 6 | 6 | 13 | 6 | $S(13,4)$ |
| $7_4$ | 0 | 0 | 7 | 7 | 15 | 5 | $S(15,4)$ |
| $7_5$ | 0 | 0 | 8 | 8 | 17 | 8 | $S(17,5)$ |
| $7_6$ | 0 | 0 | 9 | 9 | 19 | 9 | $S(19,7)$ |
| $7_7$ | 0 | 0 | 10 | 10 | 21 | 7 | $S(21,8)$ |
| $8_1$ | 0 | 0 | 6 | 6 | 13 | 6 | $S(13,7)$ |
| $8_2$ | 0 | 0 | 8 | 8 | 17 | 8 | $S(17,3)$ |
| $8_3$ | 0 | 0 | 8 | 8 | 17 | 8 | $S(17,13)$ |
| $8_4$ | 0 | 0 | 9 | 9 | 19 | 9 | $S(19,5)$ |
| $8_5$ | 0 | 0 | 12 | 11 | 21 | 9 | Montesinos-3 |
| $8_6$ | 0 | 0 | 11 | 11 | 23 | 11 | $S(23,7)$ |
| $8_7$ | 0 | 0 | 11 | 11 | 23 | 11 | $S(23,9)$ |
| $8_8$ | 0 | 0 | 12 | 12 | 25 | 12 | $S(25,9)$ |
| $8_9$ | 0 | 0 | 12 | 12 | 25 | 12 | $S(25,7)$ |
| $8_{10}$ | 0 | 0 | 15 | 14 | 27 | unknown | Montesinos-3 |
| $8_{11}$ | 0 | 0 | 13 | 13 | 27 | 11 | $S(27,10)$ |
| $8_{12}$ | 0 | 0 | 14 | 14 | 29 | 14 | $S(29,17)$ |
| $8_{13}$ | 0 | 0 | 14 | 14 | 29 | 14 | $S(29,11)$ |
| $8_{14}$ | 0 | 0 | 15 | 15 | 31 | 15 | $S(31,13)$ |
| $8_{15}$ | 0 | 0 | 18 | 17 | 33 | unknown | Montesinos-3 |
| $8_{16}$ | 0 | 0 | 17 | 17 | 35 | unknown | not small |
| $8_{17}$ | 0 | 0 | 18 | 18 | 37 | unknown | – |
| $8_{18}$ | ?? | ?? | ?? | ?? | 45 | unknown | – |
| $8_{19}$ | 0 | 0 | 3 | 2 | 3 | unknown | Montesinos-3 |
| $8_{20}$ | 0 | 0 | 6 | 5 | 9 | 5 | Montesinos-3 |
| $8_{21}$ | 0 | 0 | 9 | 8 | 15 | unknown | Montesinos-3 |
| $9_{46}$ | 0 | 0 | 6 | 5 | 9 | 4 | Montesinos-3 |
| $10_{132}$ | 0 | 0 | 8 | 5 | 5 | 8 | Montesinos-3 |
| $3_1\#3_1$ | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | unknown | composite |