

指標代数多様体の断面の既約成分数について

長郷 文和

ABSTRACT. この報告では、『指標代数多様体の断面の既約成分数』という、ある整数値 (正値) 結び目不変量 $|S_0(K)|$ が自明な結び目を識別するか? という疑問に対し、部分的な解答を与える.

1. はじめに

$S_0(K)$ は, $SL_2(\mathbb{C})$ 表現のうち, ある特定の性質を持つものを集めた集合により定義される結び目不変量である ([N1, NY], または本稿第3節参照). この不変量 $S_0(K)$ は, $SU(2)$ 表現に限定した場合, X.-S. Lin 氏により $SU(2)$ 表現空間を用いて定義された Casson-Lin 不変量 ([L]) において, 重要な役割を果たした対象と一致する.

Casson-Lin 不変量と同様に, $S_0(K)$ は結び目の符号数 $\sigma(K)$ との関係があることが期待されるが, 筆者の研究 [N1] では $S_0(K)$ の表言論的性質が, 東京大学の山口祥司氏との共同研究 [N2] では $S_0(K)$ の幾何学的性質が, 結び目の行列式 $|\Delta_K(-1)|$ により調べられている¹. また最近では, Kronheimer と Mrowka ([KM]) により, Khovanov homology の視点から, $SU(2)$ に限定した $S_0(K)$ の性質が研究されており, 筆者にとって非常に興味深い研究対象である.

$S_0(K)$ は代数的集合である (第3節参照) が, その既約成分数と A-多項式 ([CCGLS], または本稿第6節参照) とよばれる2変数多項式不変量との関係が, 筆者により2橋結び目に対して調べられている ([N1]). 今回は, より一般的な結び目に対して, この性質を拡張することにより (Proposition 2), $|S_0(K)|$ と結び目 (外部空間) の位相幾何学的な性質について調べる.

2. 主結果

この報告における主結果は、『指標代数多様体の断面の既約成分数』という結び目不変量 $|S_0(K)|$

$$|S_0(\cdot)| : \{ \text{結び目} \} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

が自明な結び目を識別するか否か, という疑問に対する部分的な解答である.

Theorem 1 (main result). *If $|S_0(K)| = 1$, then one of the followings holds:*

- (1) K is the unknot O .
- (2) K is a non-small (large) knot² satisfying $|\Delta_K(-1)| = 1$.

実際, 結び目の連結和に関する $S_0(K)$ の振る舞いは, ある意味『加法的』であることが, 筆者の研究 [N2] でわかっており, Theorem 1 により, $|S_0(K)| = 1$ を満たす結び目の研究は, 本質的に, 素な結び目についてのみ考察すればよいことにな

¹符号数 $\sigma(K)$ ではなく, 行列式 $|\Delta_K(-1)|$ が現れることには, いくつかの原因があるが, その理由に関しては, ここでは割愛させていただきます.

²結び目が large であるとは, その外部空間に本質的閉曲面を含むときをいう. それ以外の結び目を small とよぶ. 例えば, 2-bridge knot は small な結び目の代表例である.

る．従って，ターゲットとなる結び目は，large hyperbolic knot(の一部) と satellite knot(厳密には companion と pattern knot の type も限定できる) である．これらのうち $|S_0(K)| = 1$ となる例は現時点で確認されておらず，幾分楽観的ではあるが，(2) は起こらないと筆者は予想する(この予想に関する研究は，今後の課題である)．

以降では，この主結果を解説する．

3. $S_0(K)$ の定義

3.1. 指標代数多様体 $X(K)$ の構成．結び目 K が与えられると，Wirtinger 表示等を用いて，結び目群 $G(K)$ を構成することができる．このとき， $G(K)$ の表現全体を集めることで，結び目 K の指標代数多様体 (character variety) $X(K) \subset \mathbb{C}^N$ を構成することができる．例えば，三葉結び目 3_1 の場合，次の様にして $X(3_1)$ が求まる．

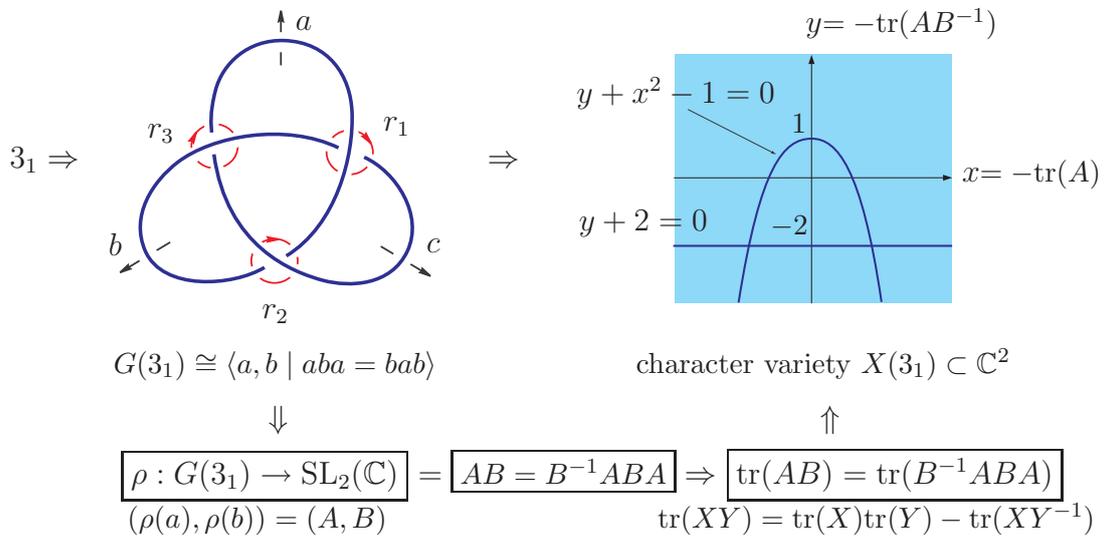


FIGURE 1. $X(3_1)$ の構成法

上記の操作について簡単に解説する．表現は群準同型であることを思い出すと，結び目群 $G(3_1)$ から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現 $\rho : G(3_1) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ を構成するには，結び目群の関係式 $aba = bab$ を満たす様に，生成元 a, b の行き先 (行列) を定めればよい．従って，表現 ρ は行列の組 $(\rho(a), \rho(b)) = (A, B)$ によって表される．但し，行列 A, B は $ABA = BAB$ ，即ち $AB = B^{-1}ABA$ を満たすものとする．このとき，行列の組 (A, B) の中には本質的に重複しているもの (共役なもの) が沢山ある．その重複をうまく処理するために，表現の trace (指標, character) を考える．表現の関係式から trace は $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(B^{-1}ABA)$ を誘導する．ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -trace identity $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - \mathrm{tr}(XY^{-1})$ により，この trace の関係式を分解すると，ある 2 変数多項式 $f(x, y)$ に対し $f(-\mathrm{tr}(A), -\mathrm{tr}(AB^{-1})) = 0$ と表されることがわかる．いくつかの計算により， $f(x, y)$ は具体的に

$$f(x, y) = (y + 2)(y + x^2 - 1)$$

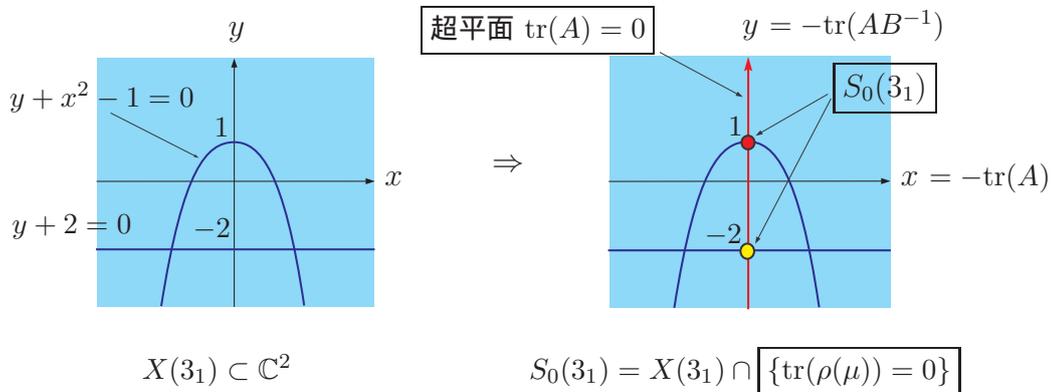
と表されることが確認できるが，この多項式の零点集合が $X(3_1)$ を定める．上記のグラフは $X(3_1)$ を \mathbb{R}^2 上で見たものである．

一般の結び目 K に対しても，同様に $X(K)$ を求めることができるが，計算は非常に面倒なものになる (詳細は [CS] を参照) ．

3.2. $S_0(K)$ の定義. 本研究で注目している対象 $S_0(K)$ は, 指標代数多様体 $X(K)$ を用いて, 次の様に定義される.

まず, 結び目 K に対し, その指標代数多様体 $X(K)$ が構成されたとする. そのときに, $X(K)$ が定義されている複素空間の軸には, 必ず1つ, しかも1つだけ, 結び目の meridian μ の表現 $\rho(\mu)$ の trace に対応しているものがある. そこで, $\text{tr}(\rho(\mu)) = 0$ で定義される超平面で $X(K)$ を切断して得られる断面 (slice) を $S_0(K)$ と定義する. これは, 明らかに代数的集合であり, 結び目の不変量になっていることを確認することは, それほど難しいことではない.

例えば, 3_1 の場合, 断面は2点から成る. 実際, meridian μ の trace に対応する軸は x 軸であり, $x = 0$ で定義される超平面は y 軸である. このとき, \mathbb{R}^2 上で描かれた $X(3_1)$ を y 軸で切断すると, 2点が現れる. 実は, \mathbb{C}^2 上の $X(3_1)$ を y 軸で切断しても, やはりこの2点だけであることが計算から確認できる. 従って, $S_0(3_1)$ は2点から構成される代数的集合であることがわかる. 指標代数多様体上の1点は, 大雑把に言って, 表現の共役類の1つに対応している.



ここで, 今回注目している整数値結び目不変量 $|S_0(K)|$ を以下の様に定義する.

Definition 1 ($|S_0(K)|$ の定義). 任意の結び目 $K \subset \mathbb{S}^3$ に対し

$$|S_0(K)| := S_0(K) \text{ の既約成分数 (重複度込み)}$$

と定義する.

例えば, 3_1 の場合は $|S_0(3_1)| = \#\{ \bullet, \circ \} = 2$ となる.

4. 主結果 (Theorem 1) の一部の証明のアイデア

以降では, 主結果 (Theorem 1) の一部の証明のアイデアについて解説する.

Proposition 1. 自明な結び目 $O \subset \mathbb{S}^3$ に対し, $|S_0(O)| = 1$ が成立する.

任意の結び目 $K \subset \mathbb{S}^3$ に対し, A -多項式とよばれる2変数多項式不変量 $A_K(M, L) \in \mathbb{Z}[M, L]$ が定義される ([CCGLS], または本稿第6節参照). このとき, 次が成立する.

Proposition 2 ($|S_0(K)|$ の下界). *Small* な結び目 (非自明) K に対して, $|S_0(K)| \geq \deg_L A_K(M, L)$ が成立する.

これは, [N1] における結果の拡張である. 因みに, この評価式は最良 (best possible) であることが, 2-bridge knot において確認できる ([N1] 参照).

Proposition 3 (A -多項式の次数の下界 [CCGLS]). *Small* な結び目 (非自明) K に対して, $\deg_L A_K(M, L) \geq 2$ が成立する.

Proposition 1, 2, 3 を組み合わせると、主結果の一部を得ることができる。

Theorem 2 (主結果の一部). *If $|S_0(K)| = 1$, then K is the unknot O or K is not small (i.e. large).*

以降の第 5, 6 節では、Proposition 1, 2 について少し詳しく解説する (Proposition 3 については [CCGLS] 等を参照)。

5. 直ちにわかる事実 (Proposition 1)

表現の性質から、直ちに Proposition 1 がわかる。実際、自明な結び目 O の結び目群 $G(O)$ は、 $G(O) \cong \mathbb{Z}\langle \mu \rangle$ (μ : meridian), つまり meridian により生成される無限巡回群であるから、その表現 $\rho: G(O) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ は 1 つの行列 $\rho(\mu)$ のみで表され

$$\rho(\mu) = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \text{ の任意の元}) \sim_{\mathrm{conj}} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix} \text{ or } \pm \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の形しかとりえない。trace は共役で不変であるので、断面 $S_0(O)$ 上の点となる指標は

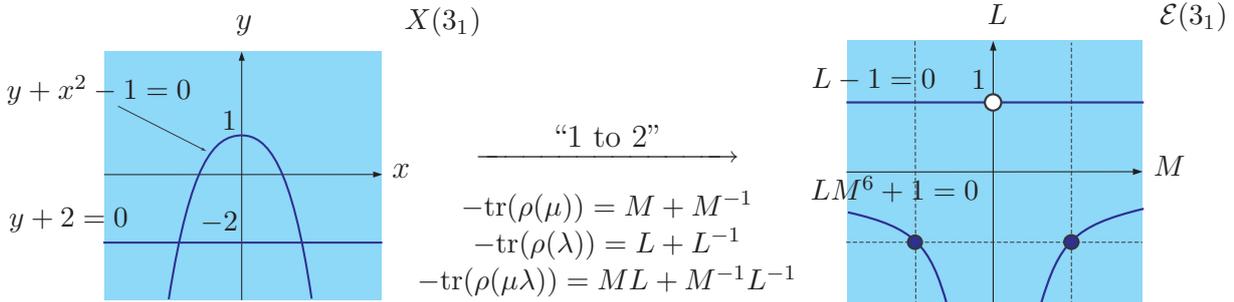
$$\mathrm{tr}(\rho(\mu)) = \mathrm{tr} \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} = 0$$

に限定されることからわかる。この指標 (表現の trace) は可換指標とよばれ、先ほどの $S_0(3_1)$ の点 \bullet に対応するものである。可換指標は、任意の結び目 K に対し、その結び目群 $G(K)$ の可換化、即ち、結び目外部空間 $E(K)$ の 1 次元ホモロジー群 $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}\langle \mu \rangle$ を経由することにより、常に構成できることから、直ちに次の系を得る。

Corollary 1. 任意の結び目 $K \subset \mathbb{S}^3$ に対し、 $|S_0(K)| \geq 1$ が成立する。

6. A-多項式 $A_K(M, L)$ からわかること (Proposition 2)

6.1. A-多項式 $A_K(M, L)$ について。『 $X(K)$ の情報を meridian μ と longitude λ の情報に書き換える』ことで、 \mathbb{C}^2 上の集合 $\mathcal{E}(K)$ を構成することができる。例えば $K = 3_1$ のとき、この集合 $\mathcal{E}(3_1)$ は以下の様になる。



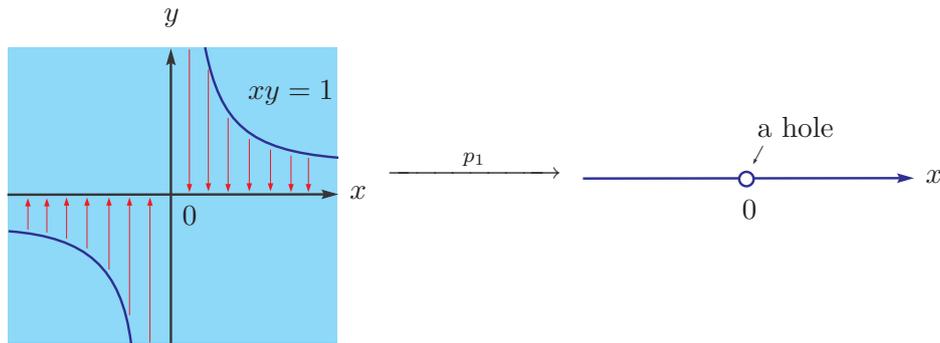
この操作を簡単に解説する。まず、上記の 3 つの連立方程式を考える。ここで、指標代数多様体 $X(3_1)$ 上の点を 1 つ定めると、連立方程式中の $\mathrm{tr}(\rho(\mu))$, $\mathrm{tr}(\rho(\lambda))$, $\mathrm{tr}(\rho(\mu\lambda))$ が定まる。このとき、上記の連立方程式を解くと、2 つの解 $(m_1, l_1), (m_2, l_2)$ が求まる (重解になる場合もある)。この “1 to 2” 対応の操作を $X(3_1)$ 上の全ての点に対して行うことで $\mathcal{E}(3_1)$ が構成できる。

一般に $\mathcal{E}(K)$ は代数的集合にはならない ($L - 1 = 0$ 上にある白丸では穴が開いている!) が, $\overline{\mathcal{E}(K)}$ は, \mathbb{C}^2 上の幾つかの代数曲線と有限個の点から成ることがわかっている (詳細は [CCGLS] を参照). このうち代数曲線の定義多項式 (重複度無視) を A-多項式 $A_K(M, L)$ という. 例えば 3_1 の場合, $A_{3_1}(M, L) = (L - 1)(LM^6 + 1)$ となる.

ここで, $\mathcal{E}(K)$ の閉包をとる理由について, もう一度注意しておく. 例えば, $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ について, 第一成分への射影

$$p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, p_1((x, y)) := x$$

により, C を x 軸に射影すると, $x = 0$ に穴が開く.



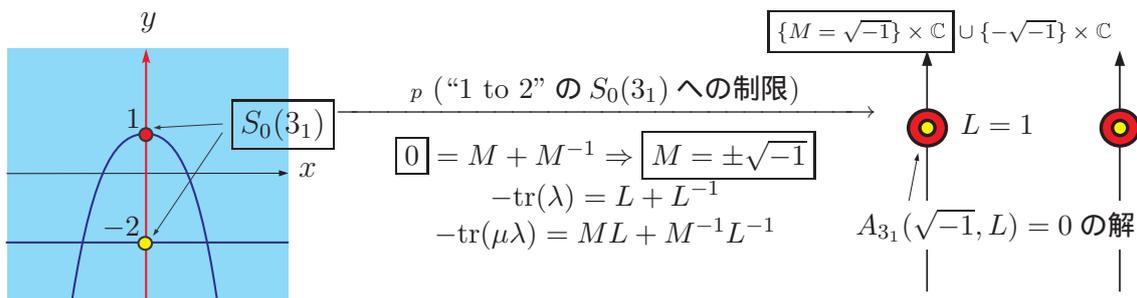
従って, p_1 の像から代数的集合 (多項式の零点) を得るためには, この穴を閉包で塞ぐ必要がある. この様に, 写像の像, より一般に, 上記の “1 to 2” 対応の様な, ある操作の結果において, 閉包で塞がれる穴を hole という. $\mathcal{E}(K)$ に対する hole の厳密な定義 ([CL]) には, もう少し制約があるが, 今回はこの定義で差し支えない.

6.2. A-多項式 $A_K(M, L)$ からわかること. A-多項式を用いると, Proposition 2 が導かれる. 以下に Proposition 2 の証明の概略を述べる.

先程の “1 to 2” 対応を用いると, $S_0(K)$ の射影

$$p : S_0(K) \rightarrow \{A_K(\sqrt{-1}, L) = 0 \text{ の解}\} \cup \{\mathcal{E}(K) \text{ の } 0 \text{ 次元成分 } (\sqrt{-1}, l)\} \subset \mathbb{C}$$

を構成できる. 例えば $K = 3_1$ のとき, この射影は以下の様になる.



この構成について少し解説する. まず, 先ほどの集合 $\mathcal{E}(3_1)$ を構成するとき考えた “1 to 2” 対応を思い出す. 今, この対応を断面 $S_0(3_1)$ 上に制限すると, $\text{tr}(\rho(\mu)) = 0$ が常に成立することから, 連立方程式の第 1 式が $0 = M + M^{-1}$ となり, 従って $M = \pm\sqrt{-1}$ が確定する. つまり, $S_0(3_1)$ 上での “1 to 2” 対応では, M の座標が $M = \pm\sqrt{-1}$ に限定されてしまうことを示している. このとき, これらの M について, 残りの連立方程式を解くと, $M = \sqrt{-1}$ と $M = -\sqrt{-1}$ において, それぞれ L に関する全く同じ解 (一部逆元等に入れ代わっている場合もある) が現れ

ることがわかる (これは一般の場合にも成立する) . つまり, “1 to 2” 対応の点として, $M = -\sqrt{-1}$ 上には, $M = \sqrt{-1}$ 上の点のコピーが現れる. そこで, 一方の $M = \sqrt{-1}$ 上の点にのみに注目すると, $S_0(3_1)$ から $\{\sqrt{-1}\} \times \mathbb{C}$ 上への写像 (“1 to 1” 対応) が構成できる. これが写像 p の構成法である. 一般の場合にも, 全く同様に構成できる. 写像 p の像は, A -多項式の定義を思い出すと, A -多項式の特殊値の零点 $A_K(\sqrt{-1}, L) = 0$ になっているか, または A -多項式が無視している $\mathcal{E}(K)$ 上の 0 次元既約成分で M の座標が $\sqrt{-1}$ になっているもののどちらかであることも容易にわかる.

上記の議論により, $A_K(\sqrt{-1}, L) = 0$ の解が重複度込みで 2 つ以上存在すれば, その解を p で引き戻すことにより, $S_0(K)$ 上の点が重複度込みで 2 つ以上存在することを示すことができそうである. 但し, $A_K(\sqrt{-1}, L) = 0$ の解が全て $S_0(K)$ から射影されたものとは限らないということに注意する. つまり, $A_K(\sqrt{-1}, L) = 0$ の解の中には, hole (閉包で塞いだ穴) が存在する可能性もある.

実は, hole という点は, ある特殊な点 (ideal point) に対応しており, $A_K(\sqrt{-1}, L) = 0$ の解に hole が含まれていれば, Culler-Shalen 理論により, 結び目外部空間内に本質的閉曲面が存在することがわかる (詳細は [CS] を参照). そこで, 結び目 K の外部空間が本質的閉曲面を含まない, つまり結び目 K が small であると仮定すると, hole の存在の可能性が排除される. このとき,

$$S_0(K) \supset p^{-1}(A_K(\sqrt{-1}, L) = 0 \text{ の解})$$

が成立する. ここで, small な結び目に対し, $\dim_{\mathbb{C}}(S_0(K)) = 0$ が常に成立するから, この包含関係より, 各集合に存在する点の個数が勘定でき, 不等式

$$|S_0(K)| \geq \deg_L(A_K(\sqrt{-1}, L))$$

を得る. 更に, 結び目が small の場合, $\deg_L(A_K(\sqrt{-1}, L)) = \deg_L(A_K(M, L))$ が成立する³. よって, Proposition 2 を得る.

7. Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ からわかること

Large な結び目 K でも, $|\Delta_K(-1)| \neq 1$, 即ち, K で分岐する S^3 の 2 重分岐被覆が整ホモロジー球面でなければ, 以下に示す既約メタベリアン表現 ($S_0(3_1)$ 上の \bullet に対応) の存在性から (A -多項式を用いずに), $|S_0(K)| \geq 2$ であることがわかる.

Theorem 3 (Theorem 1.2 [N1], Proposition 4.4 [NY]). *The characters of all irreducible metabelian representations are contained in $S_0(K)$ and the number of such characters is given by $\frac{|\Delta_K(-1)|-1}{2}$.*

従って, Theorem 3 と Theorem 2 を組み合わせることで, Theorem 1 を得る.

REFERENCES

- [CCGLS] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long and P. Shalen: *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 47–84.
 [CGLS] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Lueke and P. Shalen: *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **115** (1987), 237–300.

³もし $\deg_L(A_K(\sqrt{-1}, L))$ が $\deg_L(A_K(M, L))$ より小さいとすると, A -多項式の Newton polygon に垂直な edge が現れる. このとき, K は meridian を boundary slope に持つことになるが, 『 K が small ならば meridionally small (meridian を boundary slope に持たない)』という性質から K は large になる.

- [CL] D. Cooper and D. Long: *Remarks on the A-polynomial of a knot*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), 609–628.
- [CS] M. Culler and P. Shalen: *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109–146.
- [L] X.-S. Lin: *A knot invariant via representation spaces*, J. Differential Geom. **35** (1992), pp.337–357.
- [KM] P.B. Kronheimer and T.S. Mrowka: *Knot homology groups from instantons*, available at **arXiv:0806.1053**.
- [N1] F. Nagasato: *Finiteness of a section of the $SL(2, \mathbb{C})$ -character variety of the knot group*, Kobe Journal of Mathematics, **24** (2007), 125–136.
- [N2] F. Nagasato: *On a behavior of a slice of the $SL_2(\mathbb{C})$ -character variety of a knot group under the connected sum*, to appear.
- [NY] F. Nagasato and Y. Yamaguchi: *On the geometry of a certain slice of the character variety of a knot group*, available at **arXiv:0807.0714**.

名古屋市天白区塩釜口 1-501 名城大学 理工学部 数学科
E-mail address: fukky@ccmfs.meijo-u.ac.jp