

論文賞(テーマ1)「絶対値の効用」

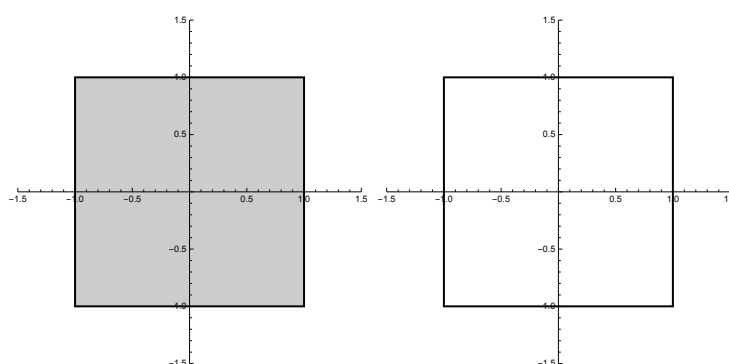
(x, y) 平面において, x と y の一次式と絶対値を組み合わせただけの簡単な等式で多くの図形が表されます. 例えば, $|x + y| + |x - y| = 2$ は正方形の周を表し, $|x + 1| + |x - 1| + |y + 1| + |y - 1| = 4$ は正方形の周と内部を表します. 正3角形や正5角形の周や周と内部を表す等式を求めて下さい. また, 正多角形とは限らない凸多角形を表す出来るだけ単純な(美しい)等式を考えて下さい. さらに, 正多面体などの3次元の凸多面体について, x, y, z の式と絶対値を使って同様の考察をして下さい.

[解説]

鈴木紀明(名城大学理工学部)

§1. 正3角形と正5角形

まず, 問題例にある正方形の場合を図示しておきます. $|x + y| + |x - y| = 2$ が右下図で, $|x + 1| + |x - 1| + |y + 1| + |y - 1| = 4$ が左下図になります.



この問題に対する提出論文は4編のみでした. 出題者としては少し寂しい感じですが, 正方形の場合に比して, 正3角形や正5角形がそれほど簡単ではないことが原因かもしれません. これらの解答例から始めます.

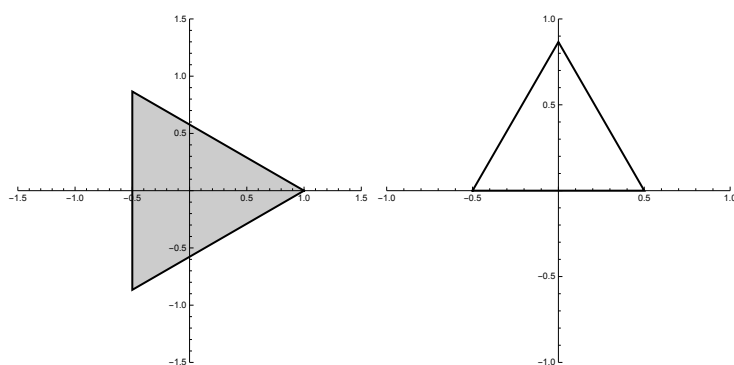
[正3角形の場合]

(1.1) 頂点 $(1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ の正三角形の周と内部は次式で表される:

$$|x + \sqrt{3}y - 1| + |2x + 1| + |x - \sqrt{3}y - 1| = 3$$

(1.2) 頂点 $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ の正三角形の周は次で表される:

$$\sqrt{3} + 2y - 2\sqrt{3}|x| - \sqrt{3} \left| -1 + 2\sqrt{3}y + 2|x| \right| = 0$$



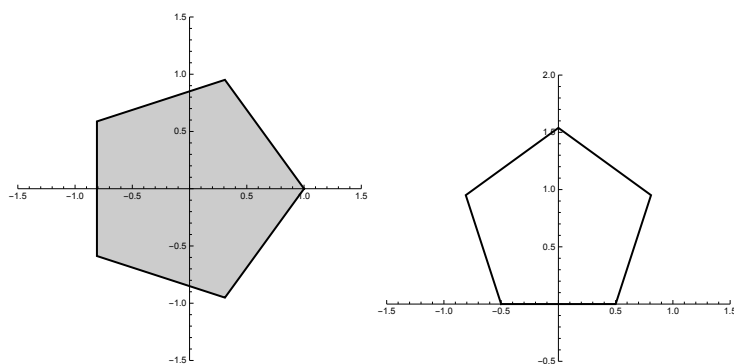
[正 5 角形の場合]

(1.3) 頂点が $(\cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n})$, $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ の正 5 角形の周と内部は次で表される :

$$|(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}y - \sqrt{5} - 1| + |(1 - \sqrt{5})x + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}y - \sqrt{5} - 1| + |4x + \sqrt{5} + 1| \\ + |(1 - \sqrt{5})x - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}y - \sqrt{5} - 1| + |(\sqrt{5} + 1)x - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}y - \sqrt{5} - 1| = 5(\sqrt{5} + 1)$$

(1.4) 頂点が $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}), (0, \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}), (-\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})$ の正 5 角形の周は次で表される :

$$\sqrt{25 + 2\sqrt{5}} + 2y - 2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}|x| - \left| 2\sqrt{5}y + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}(2|x| - 1) \right| \\ - \left| \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}y + 2\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}|x| - (\sqrt{5} - 2) \left| 2\sqrt{5}y + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}(2|x| - 1) \right| \right| = 0$$



これらは随分と複雑ですが，作問をしているときに私が想定していた等式はこれらより遥かに複雑でした．ここで与えている等式は 2 重絶対値 (絶対値の中に絶対値が入った式が現れる) を使って随分と簡潔な形になっています．2 重や 3 重の絶対値が現れるカラクリについては §4 で説明します¹．

¹(1.2) と (1.4) を含めた §4 の内容は愛知工業大学の中村豪先生に教えて頂きました．これ以外にも，§3 の図の作成など多くの点で助けて頂きました．今回の解説原稿は中村先生のご協力なしでは完成できませんでした．改めて感謝申し上げます．

§2. 提出論文

提出された4つの論文の要点を述べます.

[1] 宮澤秀隆さん(広島市立翠町中学3年)は, 頂点が $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -2), (0, 2), (-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -2)$ である正3角形の周と内部は

$$(2.1) \quad |y + \sqrt{3}x - 2| + |y - \sqrt{3}x - 2| + 2|y + 2| = 8$$

と表され, 周は

$$(2.2) \quad \left| y + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x \right| \right| + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x \right| = 2$$

と表されることを示しました. (2.2) は (1.2) より簡潔ですね.

[2] 太田彩香さん(名古屋国際高校2年)は, 頂点が $(1, 0), (0, \sqrt{3}), (-1, 0)$ である正3角形の周と内部は

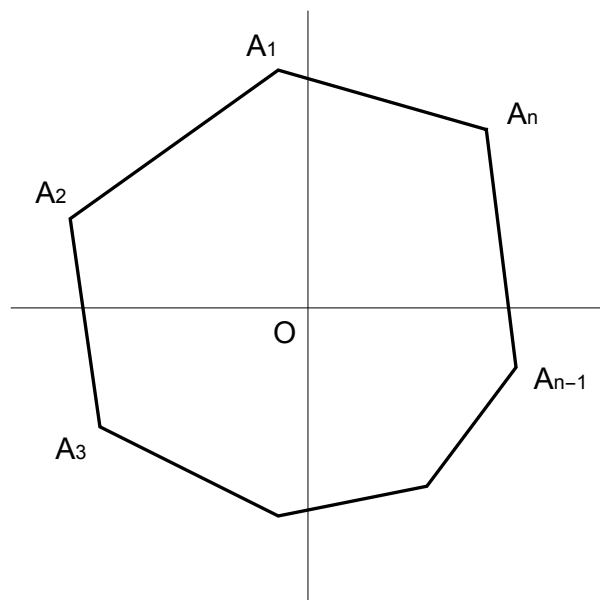
$$(2.3) \quad |\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}| + |\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}| + |y| = 2\sqrt{3} - y$$

と表され, 周は

$$(2.4) \quad \left| \sqrt{3}|x| + 2y - \sqrt{3} \right| + \sqrt{3}|x| = \sqrt{3}$$

と表されることを示しました. 太田さんはより一般の3角形についても言及しています.

他の2つの応募論文は一般の凸多角形を取り扱っています. 以後で用いる記号をはっきりさせます. 凸 n 角形の頂点を(反時計回りに) $A_1, A_2, \dots, A_n$ とします. 多角形は原点を内部に含むとします(含まない場合は適当に平行移動すればよい).



$A_k = (a_k, b_k)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ とする. 点 A_k, A_{k+1} を通る直線 (ただし, $A_{n+1} = A_1$) は

$$(2.5) \quad \ell_k(x, y) := (b_{k+1} - b_k)x - (a_{k+1} - a_k)y - a_k b_{k+1} + a_{k+1} b_k$$

とすると

$$(2.6) \quad \ell_k(x, y) = 0$$

で与えられます. また, 直線 $\ell_k(x, y) = 0$ で二つに分けられた半平面のうちの原点を含むものを H_k と表します. H_k は境界 ($\ell_k(x, y) = 0$) も含みます. すなわち,

$$(2.7) \quad \begin{cases} \ell_k(0, 0) < 0 \text{ ならば } H_k := \{(x, y); \ell_k(x, y) \leq 0\} \\ \ell_k(0, 0) > 0 \text{ ならば } H_k := \{(x, y); \ell_k(x, y) \geq 0\} \end{cases}$$

[3] 川添裕功さんと榎原晃都さん (久留米工業高専 3 年) は, 点 $X = (x, y)$ が凸 n 角形の境界と内部に含まれる必要かつ十分条件は

$$(2.8) \quad \sum_{k=1}^n [3 \text{ 角形 } A_k A_{k+1} X \text{ の面積}] = \text{凸 } n \text{ 角形の面積}$$

であることを見つけました (素晴らしい!). (2.8) を等式で表すと, 3 角形 $A_k A_{k+1} X$ の面積 $= |\ell_k(x, y)|/2$ なので

$$(2.9) \quad \sum_{k=1}^n |\ell_k(x, y)| = 2(\text{凸 } n \text{ 角形の面積}) \left(= \sum_{k=1}^n |\ell_k(0, 0)| \right)$$

となり, (2.9) は凸 n 角形の周と内部を表すことがわかります. さらに, 川添さんと榎原さんは (少し余分な記述もありますが),

$$(2.10) \quad \text{凸 } n \text{ 角形の周と内部} = \bigcap_{k=1}^n H_k$$

を使って (2.9) と同等な等式を得ています. また

凸 n 角形の周 $=$ 凸 n 角形の周と内部 $\cap$ ある直線 $\ell_k(x, y) = 0$ の上の点

であること, すなわち,

$$(2.11) \quad \text{凸 } n \text{ 角形の周} = \left(\bigcap_{k=1}^n H_k \right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^n \{(x, y); \ell_k(x, y) = 0\} \right)$$

となり, これを等式で表すと, 凸 n 角形の周は

$$(2.12) \quad \sum_{k=1}^n |\ell_k(x, y)| + \prod_{k=1}^n |\ell_k(x, y)| = \sum_{k=1}^n |\ell_k(0, 0)|$$

で表されます。これは正しい議論ですが、難点は式が非常に複雑になっていることです。川添さんと榎原さんは正 $2n$ 角形の表示や 3 次元の多面体について言及していますがここでは省略します。

[4] 星野泰佑さん (東海高校 2 年) の論文は極めて自然に書かれています。彼のアイデアは、絶対値を使うと、右半平面 $\{(x, y); x \geq 0\}$ が $|x| - x = 0$ と表され、線分 $[0, 1] = \{x; 0 \leq x \leq 1\}$ は $|x| + |x - 1| - 1 = 0$ と表すことができることが出発点です。適当な線形変換で右半平面を (2.7) の半平面 H_k に移すことにより、(2.10) から、凸 n 角形の内部と周は

$$(2.13) \quad \sum_{k=1}^n \left(|\ell_k(x, y)| - \frac{|\ell_k(0, 0)|}{\ell_k(0, 0)} \ell_k(x, y) \right) = 0$$

と表されること示しました。これは (2.9) より少し複雑ですが、次の周のみを表す等式は (2.12) より簡潔です。線分 $[0, 1]$ に適当な線形変換をすることにより、

$$f_k(x, y) := |\ell_k(x, y)| + |x - a_k| + |x - a_{k+1}| + |y - b_k| + |y - b_{k+1}| - |a_k - a_{k+1}| - |b_k - b_{k+1}|$$

と置くと、線分 $A_k A_{k+1}$ が $f_k(x, y) = 0$ と表されることを示し²、これから凸 n 角形の周は

$$(2.14) \quad \prod_{k=1}^n f_k(x, y) = 0$$

と表示できることを示しました。あえて難点を言えば、(2.14) の左辺は 1 次式ではないことです。星野さんは正 $2n$ 角形の場合は「その外接円の直径となるような対角線が n 本あり、正 $2n$ 角形の周上にある点はこれらの直線との距離の和が等しい」ことに注目して、正 $2n$ 角形の周が 1 次式と絶対値を使って

$$(2.15) \quad \sum_{k=1}^n \left| x \cos \frac{k\pi}{n} - y \sin \frac{k\pi}{n} \right| = \text{定数}$$

と表されることを示しました。

§3. 感想

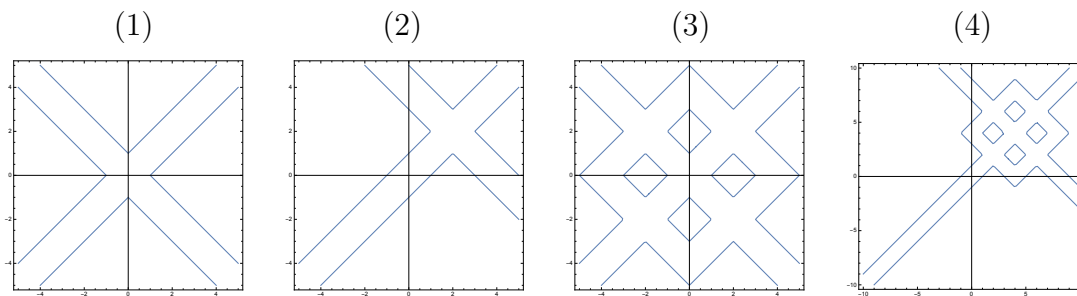
冒頭にも書きましたが、応募が少なかったのは残念です。適当に絶対値を使った式を計算機に入れて描写させ、面白い具体例を見つける作業をして欲しいと思って出題しました。例えば

- (1) $-1 + ||x| - |y|| = 0.$
- (2) $-1 + ||-2 + x| - |-2 + y|| = 0.$
- (3) $-1 + ||-2 + |x|| - |-2 + |y|| = 0.$

² $f_k(x, y) = 0$ なら $\ell_k(x, y) = 0$ かつ $|x - a_k| + |x - a_{k+1}| = |a_k - a_{k+1}|$ かつ $|y - b_k| + |y - b_{k+1}| = |b_k - b_{k+1}|$ が成り立っている。後半の 2 式から x は a_k と a_{k+1} の間にあり、 y は b_k と b_{k+1} の間にある。

$$(4) -1 + \left| \left| -2 + \left| -4 + x \right| \right| - \left| -2 + \left| -4 + y \right| \right| \right| = 0.$$

は以下のような図形になります.



さらに,

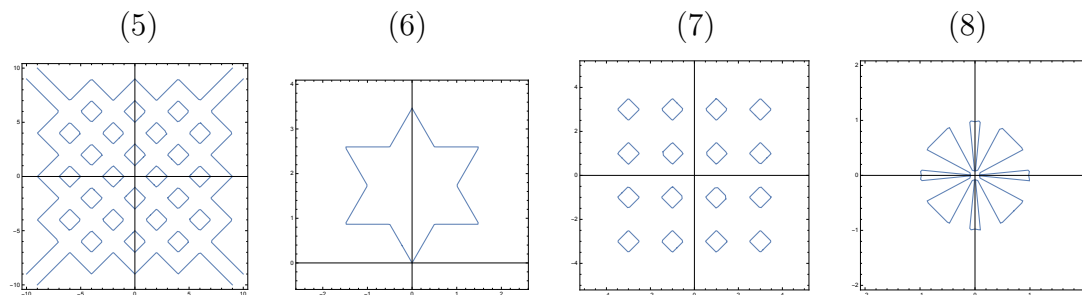
$$(5) -1 + \left| \left| -2 + \left| -4 + |x| \right| \right| - \left| -2 + \left| -4 + |y| \right| \right| \right| = 0.$$

$$(6) 4\sqrt{3} - \sqrt{3}|x| - 3|\sqrt{3} - y| - |\sqrt{3}|x| - |\sqrt{3} - y| - \sqrt{3} \left| |x| + \sqrt{3} (|\sqrt{3} - y| - |\sqrt{3}|x| - |\sqrt{3} - y|) \right| = 0$$

$$(7) -1/2 + \left| -1 + \left| -2 + |x| \right| \right| + \left| -1 + \left| -2 + |y| \right| \right| = 0$$

$$(8) \left| \left| |x| - |y| \cos \frac{5\pi}{32} - (|x| + |y|) \sin \frac{5\pi}{32} \right| \cos \frac{9\pi}{64} + \sin \frac{9\pi}{64} (|x| \cos \frac{5\pi}{32} + |y| \cos \frac{5\pi}{32} + |x| - |y| \sin \frac{5\pi}{32}) - \sqrt{2} \sin \frac{13\pi}{64} \right| \cos \frac{13\pi}{64} \\ + \left(|x| \cos \frac{9\pi}{64} \cos \frac{5\pi}{32} + |y| \cos \frac{9\pi}{64} \cos \frac{5\pi}{32} - \sqrt{2} \cos \frac{13\pi}{64} - \left| |x| - |y| \cos \frac{5\pi}{32} - (|x| + |y|) \sin \frac{5\pi}{32} \right| + |x| - |y| \cos \frac{9\pi}{64} \sin \frac{5\pi}{32} \right) \sin \frac{13\pi}{64} \\ = 0$$

は以下のような図形になります.



論文 [3], [4] のように, 一般論を展開することは力がないとできないことでとても素晴らしいことです. 一方, 面白い具体例を見つけることはそれに劣らず重要です. 正3角形を取り扱った論文 [1], [2] では2重の絶対値が現れていますが, 一般論では2重の絶対値は出てきません. 私が応募論文を見て真に驚いたのは (2.8), (2.14), (2.15) と (2.2) ですが, 次節の内容にも驚きました.

§4. アートな方法³

(1.2) や (1.4) は2重絶対値を使うことで表現式が簡潔になっています. 中村先生 (愛工大) は, 直線 $y = 0$ から出発して, 絶対値, 回転, 平行移動を用いて正多角形の周を表

³“アートな方法” は中村先生の命名です. 私は「職人芸」を少し謙遜した意味かと思っていましたが, 実は, 絶対値 (Absolute value), 回転 (Rotation), 平行移動 (Translation) を使った アート (ART) な方法だそうです.

す方法を見つけ、これによって、2重、3重の絶対値がどのようにして入り込んで来るかを説明しました。

定義 2変数関数 $f(x, y)$ に対して3種類の変換を定義する。

$$(4.1) \quad Af(x, y) := f(|x|, y)$$

$$(4.2) \quad R_\theta f(x, y) := f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$(4.3) \quad T_{p,q}f(x, y) := f(x - p, y - q)$$

特に $T_\theta := T_{\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}}$, $T := T_{\frac{1}{2}, 0}$ とする。

$f(x, y)$ が x, y の1次式るとき、上記の変換で絶対値を含む1次式になります。よって、これらの変換を何回行っても結果は絶対値を含む1次式であることを注意します。

定理 $\theta := (n - 2)\pi/n$, $\varphi := \pi/n$, $f(x, y) = y$ とおく。正 n 角形の周を表す方程式は次で与えられる。

$n = 2m + 1$: 奇数のとき

$$(4.4) \quad R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A)^{m-1} R_\varphi T A f(x, y) = 0.$$

$n = 2m$: 偶数のとき

$$(4.5) \quad R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A)^{m-1} f(x, y) = 0.$$

ここで、 $(R_{2\varphi} T_\theta A)^{m-1}$ において不要な A もありますが、式の形を整えるために入れてあります。基本的には A が現れる度に絶対値記号が入る込むことになりますが、前述の理由で、 A が k 回使われても k 重の絶対値が必ず現れるとは限りません。

幾つかの例

$n = 3, 5, 6, 7, 8$ について定理の与える式を具体的に求めてみます。

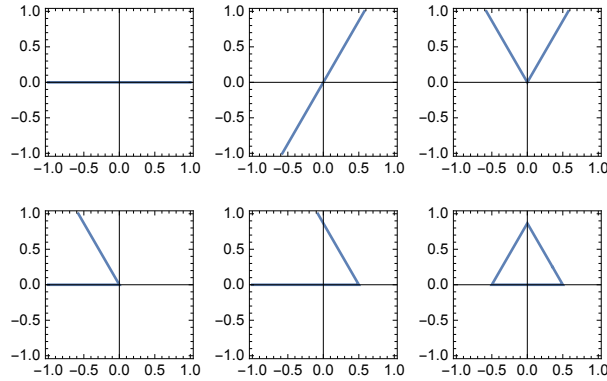
例 4.1 [正3角形] $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/3$, $f(x, y) = y$ とすると正3角形は

$$(4.6) \quad R_\varphi A R_\varphi T A f(x, y) = 0$$

で与えられます。これを数式に直して整理すると (1.2) である

$$\sqrt{3} + 2y - 2\sqrt{3}|x| - \sqrt{3} \left| -1 + 2\sqrt{3}y + 2|x| \right| = 0.$$

を得ます。(4.6) の“アート”が下図です。

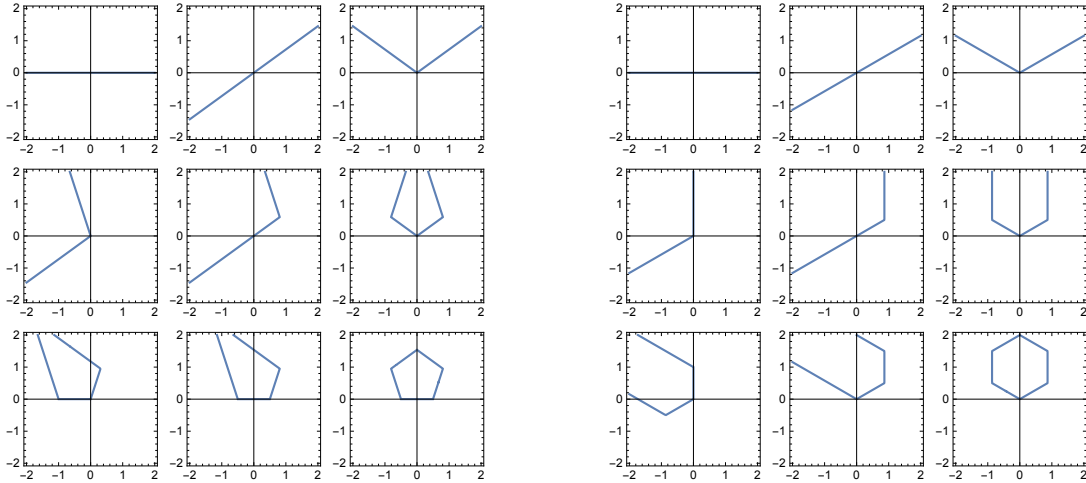


説明を加えます．なお，(4.6) の変換は左側から順に施されていると理解下さい．上段の左図が $y = 0$ のグラフです．上段中央はこれを $\pi/3$ 回転しました．変換を使えば R_φ を施したことになります．次は A です．ここで絶対値が登場します．変換 A は左半平面を右半平面の線対称形にすることと理解すると分かり易いと思います．実際に行ったものが上段右図です．下段左図は $\pi/3$ の回転である R_φ の変換です．下段中央は x 方向に $1/2$ の平行移動で，変換 T を使いました．最後に変換 A を行くと正 3 角形になります．ここでも絶対値が現れます．直線に絶対値，回転，平行移動を幾つか施して正 3 角形を作ってしまうことが“アート”です．

例 4.2 [正 5 角形] $\theta = 3\pi/5$, $\varphi = \pi/5$, $f(x, y) = y$ とすると，

$$(4.7) \quad R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A) R_\varphi T A f(x, y) = 0$$

で与えられる．これを数式にしたものが (1.4) です．“アート”は下左図です (下右図は正 6 角形の場合です)．



例 4.3 [正 6 角形] $\theta = 2\pi/3$, $\varphi = \pi/6$, $f(x, y) = y$ とすると，正 6 角形の周は

$$(4.8) \quad R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A)^2 f(x, y) = 0$$

で与えられる． A が 3 回現れて，これを数式に直すと

$$3\sqrt{3} + \sqrt{3}y - 3|x| - 3 \left| \sqrt{3}(-1 + y) + |x| \right| - \left| \sqrt{3}(-1 + y) - 3|x| + \left| \sqrt{3}(-1 + y) + |x| \right| \right| = 0$$

となり，3 重の絶対値が含まれています．偶数の正多角形は対称性があるって比較的簡単な表現式です．

例 4.4 [正 7 角形] $\theta = 5\pi/7$, $\varphi = \pi/7$, $f(x, y) = y$ とすると，定理より，正 7 角形は $R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A)^2 R_\varphi T A f(x, y) = 0$ で与えられますが，

$$(4.9) \quad R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A)(R_{2\varphi} T_\theta) R_\varphi T A f(x, y) = 0$$

と A を一つ省略した形でも表されます. (4.9) では A が3回出てきますが, これを数式で書くと

$$\left| \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{14} - |x| \cos \frac{\pi}{14} + y \sin \frac{\pi}{14} + \left(\left| |x| \sin \frac{\pi}{14} + y \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{14} \right| - \cos \frac{\pi}{7} \right) \tan \frac{3\pi}{14} \right| \tan \frac{\pi}{7} \\ - \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{14} - |x| \cos \frac{\pi}{14} + y \sin \frac{\pi}{14} \right) \tan \frac{3\pi}{14} + \left| |x| \sin \frac{\pi}{14} + y \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{14} \right| - \cos \frac{\pi}{7} = 0$$

となりこの場合も3重の絶対値が現れます.

例4.5 [正8角形] $\theta = 3\pi/4$, $\varphi = \pi/8$, $f(x, y) = y$ とすると, 定理より, $R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A)^3 f(x, y) = 0$ ですが, ここでも A を一つ省略した形でも与えられる:

$$(4.10) \quad R_\varphi A(R_{2\varphi} T_\theta A)(R_{2\varphi} T_\theta)(R_{2\varphi} T_\theta A) f(x, y) = 0$$

これを数式で表すと

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1) \left(|x| + \left| \sqrt{1 + 1/\sqrt{2}} - y \right| \right) - \left| |x| - \left| \sqrt{1 + 1/\sqrt{2}} - y \right| \right| = 0$$

であり, 比較的簡単な式です. それぞれのアートな図は下記になります.

