

『棒引きの作戦』

運動会の競技に棒引きがあります。2つのチーム A, B が3本の棒を引き合います。両チームとも何人をもどの棒に振り分けるかは予め決めていて、相手の動きによらずその作戦を実行するとし、棒の引っ張り合いでは人数の多いほうが必ず勝ち（同人数のときは引き分け）、チームとして勝つのは、より多くの棒で勝った方ということにします。例えば、両チームが3人ずつならば、チーム A は1本に1人ずつ振り分ければ、チーム B がどのように人数を振り分けても負けることはありません。このような作戦を、両チームの人数や棒の数を色々と変えた場合に考えて下さい。

解説：鈴木紀明（名城大学理工学部）

- §1. チーム B が無作為に 3 本の棒に人数を割り振る場合
- §2. チーム B の個人個人が無作為に棒を選ぶ場合 (実際の運動会はこちら?)
- §3. 金賞を受賞した鶴岡祐介さん (四条畷高 3 年) の論文について
- §4. ゲーム理論からのアプローチ

作題の際に私が想定していた解答例は §2 ですが、そのためにまず §1 を調べます¹。金賞を受賞した鶴岡祐介さん (四条畷高 3 年) の論文はこれを越えるものです (棒が m 本の場合を考察している!)。その内容は §3 で説明します。最後に、§4 でゲーム理論からの解釈 (の一端) に触れます²。なお、問題文では「作戦」と書きましたが、この解説では「戦略」という言葉を使うことにします。

§1. 棒が3本で、チーム A, B の人数が n 人の場合を考える。「チーム B が無作為に3本の棒に人数を割り振る場合」について、チーム A の最良の戦略を考える。

n 人を3つに分けるすべての組を $X(n)$ とします。すなわち、

$$(1.1) \quad X(n) := \{(x, y, z); x, y, z \text{ は非負の整数で } x + y + z = n\}$$

です。このとき、 $X(n)$ の要素の個数は $(n+2)(n+1)/2$ ですから、

$$(1.2) \quad \text{チーム B は } \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ 通りの中から無作為に 1 組の戦略 } (x, y, z) \text{ を選ぶことになります。}$$

さて、 $(x, y, z), (a, b, c) \in X(n)$ について、

$$\begin{aligned} (x, y, z) \text{ が } (a, b, c) \text{ に勝つ} &\iff x > a, y > b, z > c \text{ のうち 2 つが成り立つ} \\ (x, y, z) \text{ が } (a, b, c) \text{ に負ける} &\iff x > a, y > b, z > c \text{ のうち 1 つしか成り立たない} \\ (x, y, z) \text{ と } (a, b, c) \text{ は引き分け} &\iff \text{勝ちでも負けでもない} \end{aligned}$$

です。言い換えると、 (x, y, z) と (a, b, c) が引き分けとは、

$$\begin{aligned} x > a, y < b, z = c, \quad x < a, y > b, z = c, \quad x > a, y = b, z < c, \quad x < a, y = b, z > c, \\ x = a, y < b, z > c, \quad x = a, y > b, z < c, \quad x = a, y = b, z = c \end{aligned}$$

のどれかが成り立つことです。さらに、次の記号を使います。

$$\begin{aligned} W(a, b, c) &:= \{(x, y, z) \in X(n); (a, b, c) \text{ が } (x, y, z) \text{ に勝つ}\} \\ L(a, b, c) &:= \{(x, y, z) \in X(n); (a, b, c) \text{ が } (x, y, z) \text{ 負ける}\} \\ D(a, b, c) &:= \{(x, y, z) \in X(n); (a, b, c) \text{ と } (x, y, z) \text{ は引き分け}\} \end{aligned}$$

¹この解説記事を書くにあたり、数値計算と図の作成に関して、愛知工業大学の中村豪先生と名古屋大学研究員の中川勇人さんに助けて頂きました。感謝申し上げます。

²ゲーム理論については名古屋大学経済学部の花園誠先生にいろいろと教えて頂きました。感謝申し上げます。

以後、集合 X の要素の個数を $\#X$ と表す。

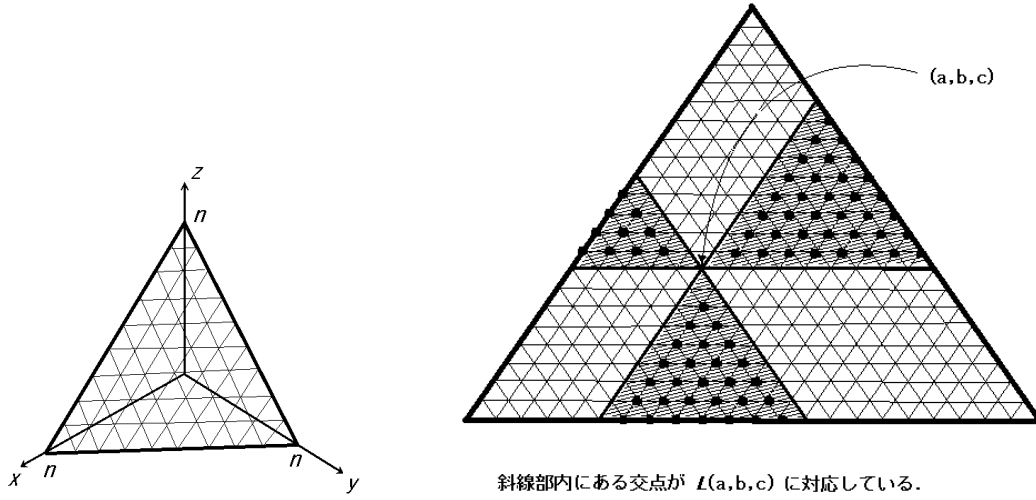
定理 1. $(a, b, c) \in X(n)$ のとき、次が成り立つ。

$$\#W(a, b, c) := ab + bc + ca$$

$$\#L(a, b, c) := \frac{a(a-1) + b(b-1) + c(c-1)}{2}$$

$$\#D(a, b, c) := 2n + 1$$

これは下図から読み取れるでしょう。



定理 2. $(a, b, c) \in X(n)$ のとき、 $\#W(a, b, c)$ が最大になるのは

$$n = 3k \text{ のとき} : (a, b, c) = (k, k, k)$$

$$n = 3k + 1 \text{ のとき} : a, b, c \text{ のうち 2 つが } \left\lceil \frac{3k+1}{3} \right\rceil \text{ で他の 1 つが } \left\lceil \frac{3k+1}{3} \right\rceil + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ のとき} : a, b, c \text{ のうち 1 つが } \left\lceil \frac{3k+2}{3} \right\rceil \text{ で他の 2 つが } \left\lceil \frac{3k+2}{3} \right\rceil + 1$$

ここで、 $[x]$ はガウスの記号 (x を超えない最大の整数) です。

これらの結果は

$$(1.3) \quad n^2 = (a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca) + \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \}$$

から容易に導かれます。よって、チーム B が (1.2) の戦略のとき、チーム A の最良の方法は (a, b, c) を定理 2 のように取ることです。例えば、 $n = 3k$ のとき、チーム A は (k, k, k) のときに勝つ確率が最も高くなり、その値は

$$(1.4) \quad \frac{\#W(k, k, k)}{\#X(n)} = \frac{2n^2}{3(n+2)(n+1)}$$

です。

§2. チーム B の個人個人が無作為に棒を選ぶ場合 (実際の運動会はこちら?) は、各個人は 3 本の棒のうちの 1 つを自由に選ぶことができるので、選び方の総数は 3^n 通りですから、

(2.1) チーム B は 3^n 通りの中から無作為に 1 組の戦略を選ぶ

場合を考えます. $(x, y, z) \in X(n)$ とする. 3 本の棒に割り振る人数が (x, y, z) になるのは

$$(2.2) \quad \frac{n!}{x!y!z!}$$

通りあることに注意すると次がわかります.

定理 3. チーム A の割り振りを $(a, b, c) \in X(n)$ とし, $T(a, b, c)$ を チーム B が チーム A に勝つ場合の全体 (すなわち, A が B に負ける) とする. このとき

$$(2.3) \quad \#T(a, b, c) = \sum_{(x, y, z) \in L(a, b, c)} \frac{n!}{x!y!z!}$$

です³.

証明は、定理 1 と (2.2) に注意すればよい. チーム B が (2.1) の場合には、チーム A としての最良の戦略は $\#T(a, b, c)$ を最小にする (a, b, c) を求めることです.

残念ながら、定理 2 のように具体的にこの数を求めることができなかったので、 $n = 4, 5, 6, 10$ についての $\#T(a, b, c)$ を計算機を使って計算した結果を記します.

(i) $n = 4$ のとき、チーム B の取りうる戦略の総数は $3^4 = 81$.

(a, b, c)	$L(a, b, c)$	$\#T(a, b, c)$
$(4, 0, 0)$	$\{(0, 3, 1), (0, 1, 3), (0, 2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$	50
$(0, 4, 0)$	$\{(3, 0, 1), (1, 0, 3), (2, 0, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$	50
$(0, 0, 4)$	$\{(3, 1, 0), (1, 3, 0), (2, 2, 0), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$	50
$(3, 1, 0)$	$\{(0, 3, 1), (0, 2, 2), (1, 2, 1)\}$	22
$(3, 0, 1)$	$\{(0, 1, 3), (0, 2, 2), (1, 1, 2)\}$	22
$(1, 3, 0)$	$\{(3, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 1, 1)\}$	22
$(1, 0, 3)$	$\{(3, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 1, 1)\}$	22
$(0, 3, 1)$	$\{(1, 0, 3), (2, 0, 2), (1, 1, 2)\}$	22
$(0, 1, 3)$	$\{(1, 3, 0), (2, 2, 0), (1, 2, 1)\}$	22
$(2, 2, 0)$	$\{(3, 0, 1), (0, 3, 1)\}$	8
$(2, 0, 2)$	$\{(3, 1, 0), (0, 1, 3)\}$	8
$(0, 2, 2)$	$\{(1, 3, 0), (1, 0, 3)\}$	8
$(2, 1, 1)$	$\{(0, 2, 2)\}$	6
$(1, 2, 1)$	$\{(2, 0, 2)\}$	6
$(1, 1, 2)$	$\{(2, 2, 0)\}$	6

よって、チーム A は $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$ を選んだときが最良であり、そのときの A が負けない (勝つか引き分ける) 確率は

$$1 - \frac{\#T(2, 1, 1)}{3^4} = 1 - \frac{6}{81} = \frac{25}{27}$$

(ii) $n = 5$ のとき、チーム B の取りうる戦略の総数は $3^5 = 243$.

$$X(5) = \left\{ \begin{array}{l} (5, 0, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 5), (4, 1, 0), (4, 0, 1), (1, 4, 0), (1, 0, 4), (0, 4, 1), (0, 1, 4), (3, 2, 0), (3, 0, 2), \\ (2, 3, 0), (2, 0, 3), (0, 3, 2), (0, 2, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2) \end{array} \right\}$$

³ここでは A が負ける場合を計算したが、 $L(a, b, c)$ の代わりに $W(a, b, c)$ を用いれば A が勝つ場合がわかる.

(a, b, c)	$L(a, b, c)$	$\#T(a, b, c)$
(5, 0, 0)	{(0, 4, 1), (0, 1, 4), (0, 3, 2), (0, 2, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)}	180
(0, 5, 0)	{(4, 0, 1), (1, 0, 4), (3, 0, 2), (2, 0, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)}	180
(0, 0, 5)	{(4, 1, 0), (1, 4, 0), (3, 2, 0), (2, 3, 0), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)}	180
(4, 1, 0)	{(0, 4, 1), (0, 3, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (1, 2, 2)}	105
(4, 0, 1)	{(0, 1, 4), (0, 3, 2), (0, 2, 3), (1, 1, 3), (2, 1, 2), (1, 2, 2)}	105
(1, 4, 0)	{(4, 0, 1), (3, 0, 2), (2, 0, 3), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2)}	105
(1, 0, 4)	{(4, 1, 0), (3, 2, 0), (2, 3, 0), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2)}	105
(0, 4, 1)	{(1, 0, 4), (3, 0, 2), (2, 0, 3), (1, 1, 3), (2, 1, 2), (1, 2, 2)}	105
(0, 1, 4)	{(1, 4, 0), (3, 2, 0), (2, 3, 0), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (1, 2, 2)}	105
(3, 2, 0)	{(4, 0, 1), (0, 4, 1), (0, 3, 2), (1, 3, 1)}	40
(3, 0, 2)	{(4, 1, 0), (0, 1, 4), (0, 2, 3), (1, 1, 3)}	40
(2, 3, 0)	{(4, 0, 1), (0, 4, 1), (3, 0, 2), (3, 1, 1)}	40
(2, 0, 3)	{(4, 1, 0), (0, 1, 4), (3, 2, 0), (3, 1, 1)}	40
(0, 3, 2)	{(1, 4, 0), (1, 0, 4), (2, 0, 3), (1, 1, 3)}	40
(0, 2, 3)	{(1, 4, 0), (1, 0, 4), (2, 3, 0), (1, 3, 1)}	40
(3, 1, 1)	{(0, 3, 2), (0, 2, 3), (1, 2, 2)}	50
(1, 3, 1)	{(3, 0, 2), (2, 0, 3), (2, 1, 2)}	50
(1, 1, 3)	{(3, 2, 0), (2, 3, 0), (2, 2, 1)}	50
(2, 2, 1)	{(3, 0, 2), (0, 3, 2)}	20
(2, 1, 2)	{(3, 2, 0), (0, 2, 3)}	20
(1, 2, 2)	{(2, 3, 0), (2, 0, 3)}	20

よって、チーム A は (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2) を選んだときに最良であり、そのときの A が負けない (勝つか引き分ける) 確率は

$$1 - \frac{\#T(2, 2, 1)}{3^5} = 1 - \frac{20}{243} = \frac{223}{243}$$

(iii) $n = 6$ のとき、チーム B の取りうる戦略の総数は $3^6 = 729$.

$$X(6) = \left\{ \begin{array}{l} (6, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 6), (5, 1, 0), (5, 0, 1), (1, 5, 0), (1, 0, 5), (0, 5, 1), (0, 1, 5), (4, 2, 0), \\ (4, 0, 2), (2, 4, 0), (2, 0, 4), (0, 4, 2), (0, 2, 4), (4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4), (3, 3, 0), (3, 0, 3), \\ (0, 3, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 3), (2, 2, 2) \end{array} \right\}$$

(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$	(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$
(6, 0, 0)	602	(4, 1, 1)	260
(0, 6, 0)	602	(4, 1, 1)	260
(0, 0, 6)	602	(1, 4, 1)	260
(5, 1, 0)	416	(3, 3, 0)	102
(5, 0, 1)	416	(3, 0, 3)	102
(1, 5, 0)	416	(0, 3, 3)	102
(1, 0, 5)	416	(3, 2, 1)	110
(0, 5, 1)	416	(3, 1, 2)	110
(0, 1, 5)	416	(2, 3, 1)	110
(4, 2, 0)	197	(2, 1, 3)	110
(4, 0, 2)	197	(1, 3, 2)	110
(2, 4, 0)	197	(1, 2, 3)	110
(2, 0, 4)	197	(2, 2, 2)	60
(0, 4, 2)	197		
(0, 2, 4)	197		

よって、チーム A は (2, 2, 2) を選んだときに最良であり、そのときの A の負けない (勝つか引き分ける) 確率は

$$1 - \frac{\#T(2, 2, 2)}{3^6} = 1 - \frac{60}{729} = \frac{223}{243}$$

(iv) $n = 10$ のとき、B チームの取りうる戦略の総数は $3^{10} = 59049$.

$$X(10) = \left\{ \begin{array}{l} (10, 0, 0), (0, 10, 0), (0, 0, 10), (9, 1, 0), (9, 0, 1), (1, 9, 0), (1, 0, 9), (0, 9, 1), (0, 1, 9), \\ (8, 2, 0), (8, 0, 2), (2, 8, 0), (2, 0, 8), (0, 8, 2), (0, 2, 8), (8, 1, 1), (1, 8, 1), (1, 1, 8), \\ (7, 3, 0), (7, 0, 3), (3, 7, 0), (3, 0, 7), (0, 7, 3), (0, 3, 7), (7, 2, 1), (7, 1, 2), (2, 7, 1), (2, 1, 7), \\ (1, 7, 2), (1, 2, 7), (6, 4, 0), (6, 0, 4), (4, 6, 0), (4, 0, 6), (0, 6, 4), (0, 4, 6), (6, 3, 1), (6, 1, 3), \\ (3, 6, 1), (3, 1, 6), (1, 6, 3), (1, 3, 6), (6, 2, 2), (2, 6, 2), (2, 2, 6), (5, 5, 0), (5, 0, 5), (0, 5, 5), \\ (5, 4, 1), (5, 1, 4), (4, 5, 1), (4, 1, 5), (1, 5, 4), (1, 4, 5), (5, 3, 2), (5, 2, 3), (3, 5, 2), (3, 2, 5), \\ (2, 5, 3), (2, 3, 5), (4, 4, 2), (4, 2, 4), (2, 4, 4), (4, 3, 3), (3, 4, 3), (3, 3, 4) \end{array} \right\}$$

(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$	(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$	(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$	(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$	(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$
(10, 0, 0)	57002	(9, 1, 0)	51892	(8, 2, 0)	40427	(7, 3, 0)	25322	(6, 4, 0)	12932
(0, 10, 0)	57002	(9, 0, 1)	51892	(8, 0, 2)	40427	(7, 0, 3)	25322	(6, 0, 4)	12932
(0, 0, 10)	57002	(1, 9, 0)	51892	(2, 8, 0)	40427	(3, 7, 0)	25322	(4, 6, 0)	12932
		(1, 0, 9)	51892	(2, 0, 8)	40427	(3, 0, 7)	25322	(4, 0, 6)	12932
		(0, 9, 1)	51892	(0, 8, 2)	40427	(0, 7, 3)	25322	(0, 6, 4)	12932
		(0, 1, 9)	51892	(0, 2, 8)	40427	(0, 3, 7)	25322	(0, 4, 6)	12932
				(8, 1, 1)	46872	(7, 2, 1)	35802	(6, 3, 1)	21882
				(1, 8, 1)	46872	(7, 1, 2)	35802	(6, 1, 3)	21882
				(1, 1, 8)	46872	(2, 7, 1)	35802	(3, 6, 1)	21882
						(2, 1, 7)	35802	(3, 1, 6)	21882
						(1, 7, 2)	35802	(1, 6, 3)	21882
						(1, 2, 7)	35802	(1, 3, 6)	21882
								(6, 2, 2)	26142
								(2, 6, 2)	26142
								(2, 2, 6)	26142

(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$	(a, b, c)	$\#T(a, b, c)$
(5, 5, 0)	8270	(4, 4, 2)	10656
(5, 0, 5)	8270	(4, 2, 4)	10656
(0, 5, 5)	8270	(2, 4, 4)	10656
(5, 4, 1)	12222	(4, 3, 3)	9786
(5, 1, 4)	12222	(3, 4, 3)	9786
(4, 5, 1)	12222	(3, 3, 4)	9786
(4, 1, 5)	12222		
(1, 5, 4)	12222		
(1, 4, 5)	12222		
(5, 3, 2)	15402		
(5, 2, 3)	15402		
(3, 5, 2)	15402		
(3, 2, 5)	15402		
(2, 5, 3)	15402		
(2, 3, 5)	15402		

よって、チーム A は $(4, 3, 3), (3, 4, 3), (3, 3, 4)$ を選んだときの最良であり、そのときの A の負けなし (勝つか引き分ける) 確率は

$$1 - \frac{\#T(4, 3, 3)}{3^{10}} = 1 - \frac{9786}{59049} = \frac{16421}{19683}$$

結果として、これらは [1] の場合と同じ戦略を選ぶことが有利であることがわかり、一般の n でもこの主張が成り立つであろうと予想できますが、確認できていません。

§3. 鶴岡祐介さん (四条畷高 3 年) は棒の本数が $m \geq 3$ の場合の考察を行いました。左端から、棒を $S_1, S_2, \dots, S_m$ と名付ます。チーム A の戦略が $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ のとき、A が勝つときのチーム B の組み合わせの総数を考えます。このとき $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ であり、 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq 0$ としてよい。鶴岡さんは $m = 3$ の場合を丁寧に考えて、それをもとにして、次のように一般化させました。

T_k を m 個の数 $a_1, a_2, \dots, a_m$ から k 個選んで積をとったものの総和とすると、次のように表されます：

$$(3.1) \quad \prod_{k=1}^m (x + a_k) := \sum_{k=0}^m T_k x^{m-k}$$

つまり、数列 $\{T_k\}$ は m 次式における解と係数の関係の x の k 次の項の係数です。

(i) $m = 3$ のとき、勝つのは 2 勝 1 敗です。チーム A が (a_1, a_2, a_3) のときに勝つのは

(1) S_1, S_2 で勝つとき：チーム B の S_1, S_2 の人数は、それぞれ a_1, a_2 未満で、その総数は $a_1 a_2$ 通り。

(2) S_2, S_3 で勝つとき：(1) と同様に考えて、その総数は $a_2 a_3$ 通り。

(3) S_3, S_1 で勝つとき：(1) と同様に考えて、その総数は $a_3 a_1$ 通り。

以上より、チーム A が勝つ組み合わせの総数は $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = T_2$ 通り (§1 の定理 1 の $\#W(a_1, a_2, a_3)$)。

(ii) $m = 4$ のとき、勝つのは 3 勝 1 敗または 2 勝 1 敗 1 分です。

(1) チーム A が 3 勝 1 敗のとき (○○○×) T_3 通り。

(2) チーム A が 2 勝 1 敗 1 分のとき (○○×-) ×と- の順序を考慮して $2T_2$ 通り.
 以上より, $m = 4$ のときチーム A が勝つ組み合わせの総数は $T_3 + 2T_2$ 通り.

(ii) $m = 5$ のとき, 勝つのは以下のときです.

(1) チーム A が 4 勝 1 敗のとき (○○○○×) T_4 通り.

(2) チーム A が 3 勝 2 敗のとき (○○○××) T_3 通り.

(3) チーム A が 3 勝 1 敗 1 分のとき (○○○×-) $2T_3$ 通り.

(2) チーム A が 2 勝 1 敗 2 分のとき (○○×--) $3T_2$ 通り.

以上より, $m = 5$ のときチーム A が勝つ組み合わせの総数は $T_4 + 3T_3 + 3T_2$ 通り.

同様に, 棒 m 本に対してチーム A が勝つ組み合わせの総数は次のように表されます.

棒の本数	勝つ組み合わせの総数
3	T_2
4	$T_3 + 2T_2$
5	$T_4 + 3T_3 + 3T_2$
6	$T_5 + 3T_4 + 6T_3 + 4T_2$
7	$T_6 + 3T_5 + 7T_4 + 10T_3 + 5T_2$
...	...

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ より,

$$(3.2) \quad T_k \leq \binom{m}{k} a_1^k$$

であり, 等号成立は $a_1 = a_2 = \dots = a_m$ のときであり, 要素 $a_1, a_2, \dots, a_m$ の分散が小さいほど, 数列 T_k は大きくなり, 勝つ組み合わせは増加します. つまり, チーム B が無作為に人数を割り振るとき, 勝つ確率を上げるためには n 人をできるだけ均等に各棒に割り振ればよいことになります.

さらに鶴岡さんはチーム A が負ける場合の組み合わせの総数も求めています. 詳細は省いて結果だけを記します. 数列 $\{K_{p,q}\}$ を以下で定義する. これは, チーム A が p 勝 q 敗 $m - p - q$ 分となる組み合わせの総数です. (p, q は自然数, $1 \leq p < q \leq m - p$, $i_1, i_2, \dots, i_p$ は自然数で $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq m$). チーム A が $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ のとき

$$(3.3) \quad K_{p,q} := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq m} \binom{a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p}}{q}$$

このとき, チーム A が負ける組み合わせの総数は

(i) $m = 3$ のとき $K_{1,2}$ 通り

(ii) $m = 4$ のとき $K_{1,3} + 3K_{1,2}$ 通り

(iii) $m = 5$ のとき $K_{1,4} + 4K_{1,3} + 6K_{1,2} + K_{2,3}$ 通り

さらに, 次の数列 $\{L_p\}$ を定義する:

$$(3.4) \quad L_p := \sum_{q=p+1}^{m-p} \binom{m-p}{q} K_{p,q}$$

これは, チーム A が p 勝で負ける組み合わせの総数を表しています. この L_p を使うと, チーム A が負ける組み合わせの総数は $m = 3$ のとき L_1 , $m = 4$ のとき L_1 , $m = 5$ のとき $L_1 + L_2$ となり, 棒が m 本のときチーム A が負ける組み合わせの総数は

$$(3.5) \quad \sum_{p=1}^{[(m-1)/2]} L_p$$

で与えられます ($[\cdot]$ はガウス記号).

鶴岡さんは、具体例として $m = 4, n = 9$ の場合にチーム A の取りうる組み合わせとその勝敗の表を与えています。

(a_1, a_2, a_3, a_4)	勝	負	分
(9, 0, 0, 0)	0	192	28
(8, 1, 0, 0)	16	140	64
(7, 2, 0, 0)	28	101	91
(7, 1, 1, 0)	37	101	85
(6, 3, 0, 0)	36	75	109
(6, 2, 1, 0)	52	68	100
(6, 1, 1, 1)	61	65	94
(5, 4, 0, 0)	40	62	118
(5, 3, 1, 0)	61	50	109
(5, 2, 2, 0)	68	46	106
(5, 2, 1, 1)	77	43	100
(4, 4, 1, 0)	64	50	109
(4, 3, 2, 0)	76	29	115
(4, 3, 1, 1)	85	26	109
(4, 2, 2, 1)	92	28	100
(3, 3, 3, 0)	81	30	109
(3, 3, 2, 1)	97	23	100
(3, 2, 2, 2)	104	13	103

§4. チーム B が無作為でなくてチーム A と同じように戦略を考えて来た場合にはどうすればよいでしょうか？鶴岡さんの論文もこの点に少し触れていますが、ここでは、花園先生 (名大・経済) に教えて頂いたゲーム理論からのアプローチを考えてみます⁴。

$n = m = 3$ の場合をもう一度振り返ってみましょう。§1 での考察は、チーム B が (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (0,1,2), (0,2,1), (1,1,1) の 10 通りの中から無作為に戦略を選んだとすると、チーム A の取るべき最良の戦略は (1,1,1) ということでした。くどいようですがこれを表に表わしてみます。勝敗はチーム B から見たものです。

縦 B, 横 A	(3, 0, 0)	(0, 3, 0)	(0, 0, 3)	(2, 1, 0)	(2, 0, 1)	(1, 2, 0)	(1, 0, 2)	(0, 1, 2)	(0, 2, 1)	(1, 1, 1)
(3, 0, 0)	分	分	分	分	分	分	分	負	負	負
(0, 3, 0)	分	分	分	分	負	分	分	分	分	負
(0, 0, 3)	分	分	分	負	分	負	分	分	分	負
(2, 1, 0)	分	分	勝	分	分	分	勝	分	負	分
(2, 0, 1)	分	勝	分	分	分	勝	分	負	分	分
(1, 2, 0)	分	分	勝	分	負	分	分	勝	分	分
(1, 0, 2)	分	勝	分	負	分	分	分	分	勝	分
(0, 1, 2)	勝	分	分	分	勝	負	分	分	分	分
(0, 2, 1)	勝	分	分	勝	分	分	負	分	分	分
(1, 1, 1)	勝	勝	勝	分	分	分	分	分	分	分

これを見ると、チーム B は (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3) を選ぶと勝つことはできません。従って、チーム B が勝つための戦略を考えたとすれば、これらを選ぶことはありえません。チーム A もこれらを選ぶことはないで、それを除いた表を作ってみます。

縦 B, 横 A	(2, 1, 0)	(2, 0, 1)	(1, 2, 0)	(1, 0, 2)	(0, 1, 2)	(0, 2, 1)	(1, 1, 1)
(2, 1, 0)	分	分	分	勝	分	負	分
(2, 0, 1)	分	分	勝	分	負	分	分
(1, 2, 0)	分	負	分	分	勝	分	分
(1, 0, 2)	負	分	分	分	分	勝	分
(0, 1, 2)	分	勝	負	分	分	分	分
(0, 2, 1)	勝	分	分	負	分	分	分
(1, 1, 1)	分	分	分	分	分	分	分

⁴これは私が理解した範囲に限って記したもので、本来のゲーム理論のほんの入り口です。さらに、私が誤解していることもあるかもしれませんがご容赦下さい。

この表を見ると、(1,1,1) が最良とは言えません。勝 1, 負 -1, 分 0 と点数化すれば、7 通りの戦略はどれも同じになります。この事実をゲーム理論の立場から見てみましょう。

戦略型 (非協力) ゲームは、プレーヤー、戦略、利得の 3 つの要素から構成されます。ゲーム理論は、対戦相手がどのような戦略を選ぶかを合理的に考えて、最適な戦略を見つけることです。考え方として、(1) 各プレーヤーにとって劣位な戦略があれば逐次消去する。(2) 各プレーヤーが自己利得を最大化するように戦略を選び、自分の予想と他者の選択が一致している均衡状態をナッシュ均衡と言います。

棒引きの問題に戻ります。プレーヤーは 2 つのチーム A, B です。これまで、戦略としては §1 で (1,2), §2 では (2,1) を考えました。3 人を 3 組に分けるパターンは (3,0,0), (2,1,0), (1,1,1) です。これらに順序を入れて (1,2) では 10 通りを考えてきましたが、(3,0,0) の 3 通りと (2,1,0) の 6 通りはそれぞれ同じ状況になっています。このことから、花園先生は

(4.1) 人数の組み合わせだけを決めて、どこに配置するかはランダムにする

ことを「戦略」と考えることを提案されました。以後は、戦略としてはこれ考えることにします。逐次消去で劣位な戦略 (3,0,0) を消去して、前述の表を、この戦略で書き換えてみると

縦 B, 横 A	(2,1,0)	(1,1,1)
(2,1,0)	1/6, 1/6	0, 0
(1,1,1)	0, 0	0, 0

縦 B, 横 A	(2,1,0)	(1,1,1)
(2,1,0)	0	0
(1,1,1)	0	0

ここで、左表は、チーム A が (2,1,0)、チーム B が (2,1,0) のときは、どの順列を取っても 1 勝 1 敗 4 分なので、B が勝つ確率 1/6、B が負ける (A が勝つ) 確率 1/6 の意味です。チーム A が (2,1,0)、チーム B が (1,1,1) のときはどの順列でも 6 分なので 0,0 です。右図は勝 1, 負 -1, 分 0 と点数化したときで、値はすべて 0 です。この場合は A, B の戦略として、それぞれが、(2,1,0), (1,1,1) のどれを取ったとしても全てナッシュ均衡になっています (ナッシュ均衡が 4 通りある)。

以上の考察を $n = 4, m = 3$ でも考えてみましょう。このときの戦略のパターンは (4,0,0), (3,1,0), (2,2,0), (2,1,1) の 4 通りです。劣位の戦略の (4,0,0) を消去して、2 つの表を作ると

縦 B, 横 A	(3,1,0)	(2,2,0)	(2,1,1)
(3,1,0)	1/6, 1/6	1/3, 1/3	0, 1/3
(2,2,0)	1/3, 1/3	0, 0	1/3, 0
(2,1,1)	1/3, 0	0, 1/3	0, 0

縦 B, 横 A	(3,1,0)	(2,2,0)	(2,1,1)
(3,1,0)	0	0	-1/3
(2,2,0)	0	0	1/3
(2,1,1)	1/3	-1/3	0

これから、ナッシュ均衡 (互いに戦略を変えない方が損をしない状態) は A, B とも (2,2,0) とした場合になります。⁵ 私の理解はここまでです⁶。

⁵これはゲーム理論からの帰結ですが、少し説明を加えます。チーム B が (2,2,0) の順列なら チーム A が (2,1,1) のどの順列の場合でも B の 1 勝 2 分で、A は勝てません。では、なぜ §1 では (2,1,1) が最良であったのか？これは (2,1,1) が順序を考慮した (3,0,0) にいつも勝つからです。§1 で (2,1,1) を有利にした要素 (3,0,0) を §4 では除いて考えているので、(2,1,1) の有利さが減少したのです。さらに、直感的な理屈を付け足すと、棒が 3 本のときは必ず 1 敗をしますが、もっとも効率良く”負ける”のは、その棒に一人も行かないことです。(2,1,1) で勝つ場合には無駄な一人がいますが、(2,2,0) で勝てば無駄がありません。この考えでは (3,1,0) も無駄はありますが、他との対戦結果から棄却されます。

⁶上記の考察では右表からナッシュ均衡を求めています。同じ内容の左表からも同じ結論が得られるのが疑問でした。その点について花園先生に明快に答えて頂きました。「左表はゲーム理論で用いられる利得表と関連させようとすると誤解を招きます。左表はあくまで「勝つ確率」であり、「利得」ではないからです。利得と見なすなら、勝ち 1 点、負けと引き分け 0 点の場合と考えられるが、この時はゼロ和ゲームでなくなり、分析も異なります。左表でのナッシュ均衡は (2,1,0) を取り合うことになります。(1,1,1) では勝てないので、勝てる可能性が少しでもある (2,1,0) の方がよいという理屈です。4 人の場合の左表のナッシュ均衡は (2,2,0), (3,1,0) の組み合わせになります」。さらに、花園先生から頂いた資料によると、 $n = 5$ のときは、両者が (3,2,0), $n = 6$ のときは両者が (4,2,0) の戦略としたときがナッシュ均衡です。興味深いことは $n = 7$ のときはナッシュ均衡は存在しないということです。花園先生ありがとうございます。

この考えを類推すると、 $n = 30$ のときの最良の戦略は (10, 10, 10) でも (15, 15, 0) でもなくて (20, 10, 0) のような気がします。確認できていません。花園先生助けて下さい。