「月の追跡」の解説と講評

鈴木紀明
名古屋大学多元数理科学研究科

子供の頃，列車に乗ったときに不思議な感じになったことが二つありました．ひとつは，列車が動き出したとき，それが自分の予期していた方向と逆向きだったときの違和感です．方向感覚の鈍さが原因でしょうが，そこが初めて行った場所だったりすると，間違った方へ向かっているのではないかという不安感で心細くなります．皆さんはこのようなときどうしますか？私は，まず，日本地図を思い浮かべ，列車の進行方向と地図上の方向を一致させることを試みます．そして次に，愛知県地図，名古屋市地図のように順次，縮尺を大きくして同じことを繰り返して，頭の中の進行方向と実際の進行方向を一致させますが，これはかなり有効です．

そして，もうひとつが今回の問題です．走行中の列車の窓から外を見ると，手前の電柱や家は飛ぶように後退するのに，遠くにある雲や山々は列車の進行と同じ方向に動いて見えます．夜空の月が一緒に付いてくるように見えることも同じです．これらはどう説明できるのでしょうか？

§1. 視点を $P_0 = (0, p)$ に向けながら，列車 $P = (t, 0)$ が直線上を動くときに，(x, y) の位置にある物体 X がどのように動いて見えるかを調べます．X の動きを角度の変化でとらえることに気づくことが最初の発見ですが，８割以上の人がそれを認識できていて頼もしく思いました．

角 XPP_0 を $\theta_X(t)$ と表すことにします (角度は線分 PX から線分 PP_0 に反時計回りに向きを付けて計る)．

このとき，十分小さい $t > 0$ に対して

$$\theta_X(t) > \theta_X(0) \quad \text{ならば} \quad X \text{ は列車と同じ方向に動いて見える，}$$
$$\theta_X(t) < \theta_X(0) \quad \text{ならば} \quad X \text{ は列車と逆の方向に動いて見える}$$

となります．

例えば $a>0,\ 0<b<p$ のとき，$X_1=(0,p+a),\ X_2=(0,p-b)$ とすると，

$t>0$ のとき

$$\theta_{X_1}(t)>0, \theta_{X_1}(0)=0 \quad \text{および} \quad \theta_{X_2}(t)<0, \theta_{X_2}(0)=0$$

ですから，X_1 は同じ向きに動いて見え，X_2 は逆向きに動いて見えます．ところで，これは P が原点 $(0,0)$ の近くの場合のみ示していることに注意して下さい．t が大きくなると $P=(t,0)$ から見た $X_1,\ X_2$ の動きは逆転するのです．このことを正谷優典君 (名東高校３年) は正確に説明しています．採点委員の村田英康先生 (旭野高校) に高く評価された彼の解答は

$$\tan\theta_{X_1}(t)=\frac{ta}{t^2+p(p+a)},\quad \tan\theta_{X_1}(t)=\frac{tb}{t^2+p(p-b)}$$

を示して，巧みな計算でそれらの最大値，最小値を求め，次の結論を導いています：視線を P_0 に向けているとき，$P=(t,0)$ から見える $X_1,\ X_2$ の動きは，

$|t|<\sqrt{p(p+a)}$ ならば X_1 は列車と同じ方向に動いて見える，
$|t|>\sqrt{p(p+a)}$ ならば X_1 は列車と逆の方向に動いて見える，
$|t|<\sqrt{p(p-b)}$ ならば X_2 は列車と逆の方向に動いて見える，
$|t|>\sqrt{p(p-b)}$ ならば X_2 は列車と同じ方向に動いて見える．

§2. (2) についても半数近くの人が正しい解答を得ていてうれしくなります．

前図において

$$\angle XP'P_0 > \angle XPP_0, \qquad \angle YP'P_0 < \angle YPP_0, \qquad \angle ZP'P_0 = \angle ZPP_0$$

なる事実を確認すれば良いわけです (角度の正負に注意せよ．上の場合は角度はすべて負になっている)．最後の等式は円周角は等しくなる事実から導かれます．他の場合も幾何学的に検証できます．円外の X の場合のみを書いておきます．X が直線 PP_0 の左側にある場合と，右側にある場合を分けて考えます．

円周角の定理から，右図では $\angle XP'P_0 = \alpha > \beta = \angle XPP_0$ であり，左図では角度が負の値であることに注意すれば $\angle XP'P_0 = -\alpha > -\beta = \angle XPP_0$ となって，どちらの場合も $\angle XP'P_0 > \angle XPP_0$ が成り立つことがわかります．

メリーゴーランドや観覧車に乗ったときに，実際にこのように見えるかをぜひ試してみて下さい．

§3. (2) の事実から (3) の解答を類推したのは伊藤義浩君 (大垣北高校２年)，中西克典君 (高田高校２年)，石黒龍仁君 (明和高校２年)，諸鍛治聡君 (東海高校２年)，横田真秀君 (津高校２年) です．議論の概略は次のようになります．

「原点 $P = (0, 0)$ と $P_0 = (0, p)$ および $P' = (t, 0)$ の３点を通る円周上の物体は P' から見たとき止まって見える (P の位置で X 見て，一旦，目を閉じて，次に P' で X を見る)．従ってこの円の外の物体は同じ方向に動いて見える．$t \to 0$ として，原点で同じ方向に動いて見えるのは PP_0 を直径とする円の外の物体である．」

結論は正しいのですが，少し直感的な感じです (それはとても大切なことですが)．伊藤君の解答はこの批判に十分耐えるりっぱなもので，採点委員の丹羽一雄先生 (一

宮西高校) をうならせました (私もうなりました)．また，中西君の答案も読み応えのあるものでした．

安元智司君 (四日市高校２年) の議論はよりスマートでかつより正確です．彼の解答は完璧で私が付け加えることは何もありません．そのままをここに転記します．

下図で P が 0 から P' へ動くとき，$P_0 = (0,p)$，$X = (x,y)$ とおき，$P = (0,0)$，$P' = (\Delta t, 0)$ とする $(\Delta t > 0)$．

Δt は十分小さいものとして考える．$\angle P_0PX = \theta$，$\angle P_0P'X = \theta'$ である．$(-\pi/2 < \theta, \theta' < \pi/2$，$(x > 0$ で $\theta > 0))$．X が同じ方向に動いて見えるとき $\theta < \theta'$．

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{y}{x},\ \tan\theta = \frac{x}{y},\ \tan\angle P_0P'A = \frac{-p}{\Delta t},\ \tan\angle XP'A = \frac{y}{x - \Delta t},$$

$$\tan\theta' = \tan(\angle P_0P'A - \angle XP'A) = \frac{-p/\Delta t - y/(x-\Delta t)}{1 - py/\Delta t(x - \Delta t)} = \frac{-p(x-\Delta t) - y\Delta t}{\Delta t(x-\Delta t) - py}$$

$\theta < \theta'$ ならば $\tan\theta < \tan\theta'$ より

$$\frac{x}{y} < \frac{-p(x-\Delta t) - y\Delta t}{\Delta t(x-\Delta t) - py}.$$

ここで $y > 0$，$\Delta t(x - \Delta t) - py < 0$ (Δt は十分小さいので)．よって

$$\begin{aligned}
x\Delta t(x-\Delta t) - pxy &> -py(x-\Delta t) - y^2\Delta t, \\
x^2\Delta t - x\Delta t^2 &> p\Delta ty - y^2\Delta t, \\
x^2 - x\Delta t &> py - y^2\ (\Delta t > 0 \text{ より}), \\
\lim_{\Delta t \to 0}(x^2 - x\Delta t) &> py - y^2, \\
x^2 &> -y^2 + py.
\end{aligned}$$

$y > 0$ の範囲で $x^2 > -y^2 + py$ を満たす領域が題意を満たす領域である．

$$\begin{aligned}
x^2 &> -y^2 + py \\
x^2 + y^2 - py + p^2/4 &> p^2/4 \\
x^2 + (y - p/2)^2 &> (p/2)^2
\end{aligned}$$

領域は $(0, p/2)$ を中心とする
$p/2$ が半径の円の外側である．