

[すごい約分?]

○沢君は計算が得意です。Y本先生の今日の課題は「 $\frac{484}{847}$ を約分しなさい」です。○沢君は、84で約分して、あっという間に

$$(*) \quad \frac{4\overline{84}}{\overline{84}7} = \frac{4}{7}$$

と答えました(実際に121が最大公約数です)。Y本先生は「それはおもしろいですね。他にもそのような数を探してみましょう」といって、次の問題を出しました。

(1) 2ケタの整数(すなわち、 A が1ケタの数のとき)で

$$(**) \quad \frac{aA}{Ab} = \frac{a}{b} \quad \text{ただし} \quad a < b$$

をみたすものをすべて求めなさい。さらに、3ケタの整数(すなわち A が2ケタの数)で上の(**)をみたすもの求めなさい((*)はそのような例です。それ以外をすべて求めて下さい)。

(2) より一般に、 A が n ケタの整数で(**)が成り立つような a, b はあるでしょうか?

(3) $a = 1, b = 6$ のときは、(**)をみたすような n ケタの数 A は存在しないことを説明しなさい。さらに、 $a = 1, b = 6$ の他に(**)が成立しない a, b の組はどんなものがありますか?

§1. 大学の講義時間は 90 分間と長いので、私は、リフレッシュの意味で、途中で“数学ジョーク”を言うことにしています。例えば「 $26/65$ を約分しなさい」。共通約数は 13 なので約分すると $2/5$ です。このどこがジョークなのか？

$$(1) \quad \frac{2 \boxed{6}}{\boxed{6} 5} = \frac{2}{5}$$

として $\boxed{6}$ を約分する (消す) のです。学生は一瞬目覚めます (たまに拍手もあります)。

§2. 今回の問題は、上のジョークを発展させたものです。すなわち (1) のようなことができるものをすべて求めてみようと言うことです。まず A が 1 ケタの場合は $aA/Ab = a/b$ の分母を払うと $(10a + A)b = (10A + b)a$ です。これを整理すると

$$(2) \quad A(10a - b) = 9ab$$

です。 $A = 1, 2, \dots, 9$ として、順に (2) をみたす a, b を求めて行けばよいわけです。例えば $A = 1$ とする。このときは $10a - b = 9ab$ です。 $a = 1$ なら $b = 1$ となり $a < b$ でないので解ではない。 $a = 2$ なら $b = 20/19$ は整数でないので解でない。順に $a = 3, 4, \dots$ として確かめると $A = 1$ のときには解はありません。次に $A = 2$ で同じ議論を行う。そして $A = 3, 4, \dots$ 大変ですが、この「しらみつぶしの方法」を行えばすべての場合が求まります。実際に、この方法で求めていた人も何人もいました。これはこれで重要なことですが、見落としが出る場合も多く、正解である次の 4 つを得ていた人は中高併せて 30 名程度でした。

$$(3) \quad \frac{16}{64} = \frac{1}{4}, \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}$$

(最後の例は、約分した結果が既約分数でないので、排除した (?) 人もいましたが、問題の条件はみたしているのものでこれも解です)。

§3. 次は A が 2 ケタの場合です。上の方法で $A = 10$ から $A = 99$ までを調べればよいのですが、まともにやれば大変です。数学者のマクミランという人が「数学とはなるべく計算をしないための技術である」と言っています。計算を少なくする工夫が数学であるとも言えます。 A が 2 ケタのとき (2) に対応する式は

$$(4) \quad A(10a - b) = 99ab$$

となります。今度の場合は $99ab$ が $10a - b$ で割り切れて、それが 2 ケタの整数になる場合を求めてみます。このように考えれば $a = 1, 2, \dots, 9$ と順に定めて、それぞれについて b を求めることになります。例えば $a = 1$ とすれば $99b$ が $10 - b$ で割り切れる場合です。実際に調べると $b = 1, 4, 5$ の場合に割り切れますが、 $a < b$ なので $b = 4, 5$ が解になり、 $166/664 = 1/4$ と $199/995 = 1/5$ を得ます。これを $a = 2, 3, \dots$ として調べると、結局は

$$(5) \quad \frac{166}{664} = \frac{1}{4}, \quad \frac{199}{995} = \frac{1}{5}, \quad \frac{266}{665} = \frac{2}{5}, \quad \frac{499}{998} = \frac{4}{8}, \quad \frac{484}{847} = \frac{4}{7}$$

がすべての解になります。ここまで完全にできていた人は中高併せて 15 名程です。

§4. 次の問は A の桁数がどんなに大きくても $aA/Ab = a/b$ となる場合があるか？です.
(3) と (5) を見比べると, (5) の最後の例を除いて, 約分した結果が同じものです. もう一度じっくりよく見ると何か法則が見つかりませんか？最初の場合を再度書いてみます.

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}, \quad \frac{166}{664} = \frac{1}{4}$$

これから

$$(6) \quad \frac{1}{4} = \frac{16}{64} = \frac{166}{664} = \frac{1666}{6664} = \frac{16666}{66664} = \dots$$

を“発見”してもらいたかったのです. ところで, 直観による発見と論理による確認(証明)は数学の両輪です. 「直観によって考え出し, 論理によって証明する」は有名な数学者ポアンカレの言葉です. (6) を確認してみましょう. A を n ケタの数とします. (4) に対応する式に $a = 1, b = 4$ とすれば

$$(7) \quad A = \frac{(10^n - 1)ab}{10a - b} = \frac{(10^n - 1)4}{6} = \frac{(99 \dots 9)4}{6} = 66 \dots 6$$

となつて, A は 6 が n 個並んだ n ケタの数としても (6) が成り立っています. 同様に $A = 66 \dots 6$ について $2A/A5 = 2/5$ が成り立ち, $A = 99 \dots 9$ として $1A/A5 = 1/5$ と $4A/A8 = 4/8$ が成り立ちます. 従つて, 問の答としては, すべての n について n ケタの数で $aA/Ab = a/b$ となる場合があります. 10 名以上の人がこの発見をしていました.

§5. 最後の問に移ります. $a = 1, b = 4$ や $a = 1, b = 5$ など, これまでに $aA/Ab = a/b$ となる (a, b) の組はいくつかありましたが, すべての (a, b) で可能であるわけではありません. その例のひとつとして, $a = 1, b = 6$ ではできないことを示しなさいということです. これは論理の問題です. 直接に(背理法を使わずに)説明もできますが, 背理法の考えを知っていればより明確に示すことができます. すなわち, $1A/A6 = 1/6$ をみたとす n ケタの数 A があつたとして, 矛盾を出せばよいわけです. (7) と同様にして

$$(8) \quad A = \frac{6(10^n - 1)}{4} = \frac{3(10^n - 1)}{2}$$

となります. $3(10^n - 1)$ は奇数ですから, 2 では割り切れず A が整数であることに矛盾します. 背理法によって, この場合は A が存在しないことが示されました.

$a = 1, b = 6$ 以外に駄目なものはあるでしょうか？大賞に輝いた西尾さん(恵那高校)は $a < b$ について駄目なものもすべて求めています. 列挙します.

$(a, b) = (1, 2), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 4), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 5), (3, 6), (3, 8), (3, 9), (4, 9), (5, 6), (5, 9), (6, 9), (7, 9), (8, 9)$ です. 西尾さんの結果は大変評価出来ることですが, 数学の議論としては, 存在しない場合の十分条件を求めたことになります. 必要条件であるかの検討が残されます. 言い換えれば, 上記以外の

$$\begin{aligned} (a, b) &= (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 7), (4, 5) \\ &= (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (8, 7) \end{aligned}$$

には $aA/Ab = a/b$ となる A が少なくとも一つは存在することを示さないといけません.
 今までの議論で $(a, b) = (1, 4), (1, 5), (2, 5), (4, 7), (4, 8)$ などには存在することが分かっています. 藤岡さん (開成中) は独自の理論を展開して

$$\frac{2}{6} = \frac{2857142}{8571426}$$

を見つけていて驚きました. さて, その他の場合も存在するでしょうか? それは簡単ではありません. 議論を振り返ると

$$(9) \quad A = \frac{ab(10^n - 1)}{10a - b} = \frac{9ab \times 11 \cdots 1}{10a - b}$$

ですから, $11 \cdots 1$ がどんな因数を持つかが証明の鍵になります. 計算機を使った結果を書いてみます.

$11 = 11$
 $111 = 3 \cdot 37$
 $1111 = 11 \cdot 101$
 $11111 = 41 \cdot 271$
 $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$
 $1111111 = 239 \cdot 4649$
 $11111111 = 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137$
 $111111111 = 3^2 \cdot 37 \cdot 333667$
 $1111111111 = 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091$
 $11111111111 = 21649 \cdot 513239$
 $111111111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901$
 $1111111111111 = 53 \cdot 79 \cdot 265371653$
 $11111111111111 = 11 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot 909091$
 $111111111111111 = 3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 2906161$
 $1111111111111111 = 11 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 5882353$
 $11111111111111111 = 2071723 \cdot 5363222357$
 $111111111111111111 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 52579 \cdot 333667$
 $1111111111111111111 = 111111111111111111(\text{素数})$
 $11111111111111111111 = 11 \cdot 41 \cdot 101 \cdot 271 \cdot 3541 \cdot 9091 \cdot 27961$
 $111111111111111111111 = 3 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 239 \cdot 1933 \cdot 4649 \cdot 10838689$
 $1111111111111111111111 = 11^2 \cdot 23 \cdot 4093 \cdot 8779 \cdot 21649 \cdot 513239$
 $11111111111111111111111 = 11111111111111111111(\text{素数})$
 $111111111111111111111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 9901 \cdot 99990001$
 $1111111111111111111111111 = 41 \cdot 271 \cdot 21401 \cdot 25601 \cdot 182521213001$
 $11111111111111111111111111 = 11 \cdot 53 \cdot 79 \cdot 859 \cdot 265371653 \cdot 1058313049$

§6. 原理的には (9) と上の表から求められると思います. (9) の分母 $10a - b$ は 2 ケタの整数ですから, 上記の素因数分解の中に, この 2 ケタの整数が出てくる場合を探せばよいわけです. 例えば $a = 1, b = 3$ のときは $10a - b = 7$ です. 7 を因数に持つのは 111111 ですから (9) で $n = 6$ とすれば

$$A = \frac{9ab \cdot 111111}{10a - b} = \frac{27 \cdot 111111}{7} = 27 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 428571$$

となり

$$\frac{1}{3} = \frac{1A}{A3} = \frac{1428571}{4285713}$$

を得ます. もう1つ, $a = 2, b = 3$ もやってみましょう. このとき $10a - b = 17$ ですから, 17 を因数に持つ場合を探します. 11111111111111 (16 ケタ) は 17 で割れますから

$$A = \frac{6(10^{16} - 1)}{17} = 9 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 5882353 = 35294117647025882$$

となり

$$\frac{2}{3} = \frac{2A}{A3} = \frac{235294117647025882}{352941176470258823}$$

です(ふー!). 大変なので, これ以降は計算機にやってもらいました. 結果として, すごい約分ができるもの一覧 (A としてなるべくケタ数の小さいもの) は下記の通りです.

$$\frac{1}{3} = \frac{1428571}{4285713}, \quad A = 428571$$

$$\frac{1}{4} = \frac{16}{64}, \quad A = 6$$

$$\frac{1}{5} = \frac{19}{95}, \quad A = 9$$

$$\frac{2}{3} = \frac{23529411764705882}{35294117647058823}, \quad A = 3529411764705882$$

$$\frac{2}{5} = \frac{26}{65}, \quad A = 6$$

$$\frac{2}{6} = \frac{2857142}{8571426}, \quad A = 857142$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3461538}{4615384}, \quad A = 461538$$

$$\frac{3}{7} = \frac{39130434782608695652173}{91304347826086956521737}, \quad A = 9130434782608695652173$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4571428}{5714285}, \quad A = 571428$$

$$\frac{4}{6} = \frac{47058823529411764}{70588235294117646}, \quad A = 7058823529411764$$

$$\frac{4}{7} = \frac{484}{847}, \quad A = 84$$

$$\frac{4}{8} = \frac{49}{98}, \quad A = 9$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5813953488372093023255}{8139534883720930232557}, \quad A = 813953488372093023255$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5952380}{9523808}, \quad A = 952380$$

$$\frac{6}{7} = \frac{67924528301886}{79245283018867}, \quad A = 7924528301886$$

$$\frac{6}{8} = \frac{6923076}{9230768}, \quad A = 923076$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7903225806451612}{9032258064516128}, \quad A = 903225806451612$$

皆さん, 今回のジョークは楽しめましたか

§7. 以上のまとめを11月3日の表彰式のときに提示しましたが、そのとき吉原周さん(甲陽学院高校)から次の指摘を受けました。「コンピュータを使った§5の表に頼らなくても、紙と鉛筆だけで§6の結果は得られますよ」彼のアイディアは§5の(9)式を

$$(10) \quad \frac{A}{10^n - 1} = \frac{ab}{10a - b}$$

とすることです。そして彼の解答は、「 $aA/Ab = a/b$ となる A が存在するのは、上式の右辺が循環小数になる場合で、その循環節が A である」(すばらしい!! ブラボー!!)。吉原さんの方針に基づいて再度解答を書いてみます。

まず、 A は n ケタの数なので (10) の左辺は 1 以下です。従って、 $ab/(10a - b) > 1$ となる組 (a, b) には解がありません。この方法で $(a, b) = (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9), (4, 9), (5, 9), (6, 9), (7, 9), (8, 9)$ が排除されます。残りの場合に (10) の右辺を計算してみます。以下では $0.a_1a_2\cdots a_n$ は $a_1a_2\cdots a_n$ が循環する循環小数を表します。

$$(1, 2) \quad \frac{1}{4} = 0.25$$

$$(1, 3) \quad \frac{3}{7} = 0.428571428571\cdots = 0.\dot{4}2857\dot{1}, \quad A = 428571$$

$$(1, 4) \quad \frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}, \quad A = 6$$

$$(1, 5) \quad 1 = 0.9999\cdots = 0.\dot{9}, \quad A = 9$$

$$(2, 3) \quad \frac{6}{17} = 0.352941176470588235294117\cdots = 0.\dot{3}52941176470588\dot{2}, \quad A = 3529411764705882$$

$$(2, 4) \quad \frac{1}{2} = 0.5$$

$$(2, 5) \quad \frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}, \quad A = 6$$

$$(2, 6) \quad \frac{6}{7} = 0.857142857142\cdots = 0.\dot{8}5714\dot{2}, \quad A = 857142$$

$$(3, 4) \quad \frac{6}{13} = 0.461538461538\cdots = 0.\dot{4}6153\dot{8}, \quad A = 461538$$

$$(3, 5) \quad \frac{3}{5} = 0.6$$

$$(3, 6) \quad \frac{3}{4} = 0.75$$

$$(3, 7) \quad \frac{21}{23} = 0.913043478260869565217\dot{3}, \quad A = 9130434782608695652173$$

$$(4, 5) \quad \frac{4}{7} = 0.571428571428\cdots = 0.\dot{5}7142\dot{8}, \quad A = 571428$$

$$(4, 6) \quad \frac{12}{17} = 0.7058823529411764\cdots = 0.\dot{7}05882352941176\dot{4}, \quad A = 7058823529411764$$

$$(4, 7) \quad \frac{28}{33} = 0.848484\cdots = 0.\dot{8}4, \quad A = 84$$

$$(4, 8) \quad 1 = 0.9999\cdots = 0.\dot{9}, \quad A = 9$$

$$(5, 6) \quad \frac{17}{22} = 0.772727\cdots = 0.7\dot{7}2$$

$$(5, 7) \quad \frac{35}{43} = 0.\dot{8}1395348837209302325\dot{5}, \quad A = 813953488372093023255$$

$$(5, 8) \quad \frac{20}{21} = 0.9523809523808\cdots = 0.\dot{9}5238\dot{0}, \quad A = 952380$$

$$(6, 7) \quad \frac{42}{53} = 0.\dot{7}92452830188\dot{6}, \quad A = 7924528301886$$

$$(6, 8) \quad \frac{12}{13} = 0.923076923076\cdots = 0.\dot{9}2307\dot{6}, \quad A = 923076$$

$$(7, 8) \quad \frac{28}{31} = 0.\dot{9}0322580645161\dot{2}, \quad A = 903225806451612$$

これより (1,2), (2,4), (3,5), (3,6), (5,6) の場合に A が存在しないことがわかります。注意ですが (1,5), (4,8) 場合の 1 は $0.999\cdots$ とみなして OK となります。 (5,6) のときは $0.77272727\cdots$ で 72 が循環しますが、最初の 7 の部分は循環しません。このような少数全体が循環していない場合も排除されます。一般に

1 以下の分数 $\frac{X}{Y}$ が循環小数になる必要十分条件は Y が 2 と 5 で割れないこと

です。この事実を名城大学の北岡先生に教わりました。北岡先生の手書かれた「代数入門」(金苑書房) は大学の数学科学生向けの代数の教科書ですが、この本の最後の節に分数の少数展開についての興味深い事実がいくつか書かれていて、その部分はそれほど難しくありません。上記についての説明も書かれています。

それにしても、 $6/17$, $21/23$, $35/43$ などの循環節の長さには驚かされました。北岡先生の本には $1/2, 1/3, \dots, 47/49, 48/49$ までの小数展開が一覧表として書かれています。次はよく知られた事実らしいですが、

$$\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1} \text{ の循環節 } 428571 \text{ を } 2 \text{ つに分けて足すと } 425 + 571 = 999$$

となります。驚いてはいけません。循環節が偶数の場合はいつもこれが成り立つそうです。例えば

$$\frac{6}{17} = 0.\dot{3}52941176470588\dot{2}, \quad 35294117 + 64705882 = 999999999$$

$$\frac{21}{23} = 0.\dot{9}13043478260869565217\dot{3}, \quad 91304347826 + 08695652173 = 99999999999$$

$$\frac{12}{17} = 0.\dot{7}05882352941176\dot{4}, \quad 70588235 + 29411764 = 999999999$$

他にも素数の逆数の循環節が 3 の倍数のときに 3 等分して足すと 9 が並ぶというものもあります。例えば

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4284\dot{7}, \quad 14 + 28 + 47 = 99, \quad \frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}, \quad 07 + 69 + 23 = 99$$

$$\frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}, \quad 052631 + 578947 + 368421 = 999999$$

言われて確かめるのは容易ですが「この表をじっくり眺めてなんでもよいから (新しい) 何かを読み取れ」が北岡先生の読者への挑戦なのです。何やら少数展開の表が宝の山のように見えてきた !!