[ランキング]

昨今は様々なところで評価を求められ，それによるランク付け (順位を決めること) が行われています。実力第一の芸術やスポーツの世界では特に顕著ですが注意すべきこともあります。それは，出された順位は絶対的なものではなく，ある一つの基準によって決められたものに過ぎないことです。基準が変われば順位も変わりえるのです。例えば，サッカーのワールドカップの予選では　4 チームによるリーグ戦を戦い，勝てば 3 点，引き分けには 1 点の勝ち点が与えられ，勝ち点の多い上位 2 チームが決勝トーナメントに出場できます。A, B, C, J の 4 チームの成績が

	A	B	C	J	勝ち点合計	勝が 2 点のとき
A	／	×	○	△	4	3
B	○	／	○	△	7	5
C	×	×	／	△	1	1
J	△	△	△	／	3	3

ならば，A と B が決勝に進みます。しかしながら，以前は，勝てば 2 点，引き分けは 1 点，というルールでした。これで計算すれば，A と J はともに 3 点になって，得失点の状況しだいでは J が 2 位となって決勝に進出する場合もありえます。

ランク付けではその基準 (ルール) が合理的であるかを検討することが重要です。その点に注意して以下の問題を考えて下さい。

(1) 草野球の 3 チーム D, T, G が試合をしました。D 対 G は 5 勝 1 敗，T 対 G は 12 勝 0 敗，D 対 T は 4 勝 2 敗でした。G は論外として， T と D のどちらを優勝とする方がよいでしょうか？全体の成績は T は 14 勝 4 敗，D は 9 勝 3 敗で勝率 (＝勝ち数 ÷試合数) は T の方が上ですが. . . 。

この結果の後，さらに，新たに M が参加しました。M と D および M と T の試合はすべて雨のため中止になり，M 対 G は 2 勝 0 敗でした。D, T, G, M の 4 チームの順位を合理的に付けるとしたらどうなりますか？M は一度も負けていないので第 1 位と考えることもできますが，G に 12 勝 0 敗の T より上位になるのは不合理な気もします。

(2) 英子さん，美子さん，詩子さんの 3 人がある音楽コンテストに出場しました。9 人の専門審査員 [1] ～ [9] の判定順位はバラバラに分かれて

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
英子さん	1	3	3	1	3	1	3	1	2
美子さん	2	1	2	3	1	2	1	3	3
詩子さん	3	2	1	2	2	3	2	2	1

でした。そして審査員の協議の結果，詩子さんが優勝しました。どのような理由によると思いますか？数学的に考えて下さい。

(3) ランク付けについて，あなたの考えを自由に書いて下さい。例えば (2) の結果に同意できないのならそれについて論じるのもよいでしょう。

「ランキング」の解説と講評

鈴木紀明
名古屋大学多元数理科学研究科

問題が長文なので戸惑う人がいるのではと心配していましたが，杞憂でした。多くの皆さんが熱心に取り組んでくれたようで，過去の問題と比べても白紙の答案が圧倒的に少なかったと思います。

採点作業は，旭丘高校の久留宮基嘉先生，高松慎悟先生，渡辺喜長先生が中心となり，私がお手伝いをする形で行いました。この問題は正解が唯一つであるという種類の問題ではありません。採点に際して，4 人の意見が初めから一致したわけではなかったことを告白しておきます。採点を通して，私たち自身が身を以て評価とランク付けの難しさを体験することになったのです。

§1. 問題 (1) の解説

D, T, G の順位をそのままの勝ち数や勝率で決めてしまうことの不合理は「試合数が一致していないことである」とほとんどの人が指摘しました。これを克服するための方法として，多くの人が採用したのは，対戦試合数を 12 に揃えるために

$$(1.1)\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{D 対 G の 5 勝 1 敗および D 対 T の 4 勝 2 敗を,}\\ \text{同じ比率の 10 勝 2 敗と 8 勝 4 敗に換算する}\end{array}\right.$$

ことでした (試合数を 6 に揃えるために，T 対 G を 6 勝 0 敗に換算することも同じ考えです)。この換算で D は 18 勝 6 敗，T は 16 勝 8 敗，G は 2 勝 22 敗となって，D の優勝が合理化されます。

ところで，D, T, G は架空のチームです。D = Dragons(中日)，T = Tigers(阪神)，G = Giants(巨人) と先読みした人がいましたが。ついでに，サッカーの表の A, B, C は A = Australia(オーストラリア)，B = Brazil(ブラジル)，C = Croatia(クロアチア) です。J = Japan を加えて，今回のワールドカップ予選リーグの対戦国です。もう一つ。英子，美子，詩子さんはそれぞれ A 子，B 子，C 子さんと読みます。念のため。

閑話休題。さて M が参加しました。あまりに試合数が少ないので M の順位は定まらないという解答も多くありました。現実はそのようになるのかもしれませんが，ここでは上述の (1.1) の考えが本当に良いのかを数学的に考えてもらうための糸口として，あえて極端な場合を設定しました。前述と同じように対戦試合数を 12 に揃えるための一つの方法として

$$(1.2)\qquad \text{M 対 G の 2 勝 0 敗を 12 勝 0 敗と換算する}$$

さらに，D, T, M は試合をしていないので優劣が付けられないから

$$(1.3)\qquad \text{M, T, D の対戦はすべて 6 勝 6 敗とみなす}$$

というものです。この考えによれば D と M が 24 勝 12 敗。T は 22 勝 14 敗，G は 2 勝 34 敗となって，D と M が優勝となります。横田真秀君 (津 3) はこの解答を書いた後

で「試合ごとに1勝の価値が変わるという問題点を持っています。T から見ると G 戦全勝の成績が大きくその価値を失ってしまうことになり納得できない」と指摘しています。斉藤諒君 (立教池袋 3) も「二人が試合をして片方が勝ったからといって，それが何百，何千，何万回と試合をしたところでその勝者が勝ち続けるとは限らない」と書いています。確かに G に対して 12 勝 0 敗の T が 2 勝 0 敗の M より順位が下なのは変な感じです。(1.2) の 2 勝 0 敗を 12 勝 0 敗と思うことは比率は同じですが，無理があるように感じます。それは (1.1) の換算にもあった問題点が，極端な場合を考えることによって顕著になったのです。

池田大志君 (五条 2) は，各対戦を 12 試合として，(1.1), (1.2), (1.3) の代わりに行われなかった試合はすべて引き分けと考えることを提唱しました。すなわち，D 対 G は 5 勝 1 敗 6 引き分け，T 対 G は 12 勝 0 敗，D 対 T は 4 勝 2 敗 6 引き分け，M 対 G は 2 勝 0 敗 10 引き分け，M 対 D は 12 引き分け，M 対 T は 12 引き分け，とするわけです。このとき

$$\begin{cases} \mathrm{D}: & 9\text{勝}\,3\text{敗}\,24\text{引き分け} \\ \mathrm{T}: & 14\text{勝}\,4\text{敗}\,18\text{引き分け} \\ \mathrm{G}: & 1\text{勝}\,19\text{敗}\,16\text{引き分け} \\ \mathrm{M}: & 2\text{勝}\,0\text{敗}\,34\text{引き分け} \end{cases}$$

となります。池田君は勝ちに m 点，引き分けに n 点，負けは 0 点とし，m, n の比率によって順位が変動することを述べています。m, n をどのように選べば合理的かは §2 で直面する問題でもあります。

三輪佳大君 (旭丘 1) は試合数が少ないので，勝率よりも (勝ち数) − (負け数) で判断すべきと考え，T, D, M, G という順位を出しました。さらに，適当な重みをつけた a(勝ち数) − b(負け数) としても結果が変わらないことを指摘しています。

高田一輝君 (滝 1) は (各対戦の) 勝ち率 = (各対戦での勝った試合数)/{(各対戦での試合数) + 1} を定めて，その和で「強さ」を測りました。分母に 1 を加えることの合理性は議論を要するところですが，少なくとも 12 勝 0 敗と 2 勝 0 敗を区別することを可能にしたアイディアです。それによれば $\mathrm{D} = 9/7 = 351/273$，$\mathrm{T} = 110/91 = 330/273$，$\mathrm{G} = 1/7 = 39/273$，$\mathrm{M} = 2/3 = 182/273$ となって，順位は D, T, M, G で直感的な感覚と合います。西田修平君 (大阪・近畿大付属 1) は，高田君と似ていますが，(試合数)/{(負け数) + 1} で判定し，こちらは T, D, M, G の順となる結果を得ました。

飯島俊介君 (大阪・岸和田 2) と杉浦佑君 (刈谷 1) の考えはより明快です。「強いチームに勝つことと，弱いチームに勝つことは，同じ価値ではなく，当然強いチームに勝つことの方が価値あることであると考えられる」(飯島君),「試合数がバラバラなので勝率，負率を利用して点を出して判定しようと思う」(杉浦君) という同じ考えの下に，あるチームに勝つことの価値と負けることの価値を

$$\text{勝つことの価値 (勝率)} = \frac{\text{勝ち数}}{\text{全試合数}}, \quad \text{負けることの価値 (負率)} = -\frac{\text{負け数}}{\text{全試合数}}$$

で定めました。すなわち，

	試合数	勝ち数	負け数	勝つ価値	負ける価値
D	12	9	3	$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$
T	18	14	4	$\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$	$-\frac{4}{18}=-\frac{2}{9}$
G	20	1	19	$\frac{1}{20}$	$-\frac{19}{20}$
M	2	2	0	$\frac{2}{2}=1$	$-\frac{0}{2}=0$

これに従って各チームの強さを計算します。例えば D は G に 5 勝 1 敗，T に 4 勝 2 敗，M に 0 勝 0 敗なので，強さは

$$\frac{1}{20}\times 5-\frac{19}{20}\times 1+\frac{7}{9}\times 4-\frac{2}{9}\times 2+1\times 0-0\times 0=\frac{59}{30}$$

です。同様の計算を行うと T, G, M の強さは，それぞれ 10/11, −6/19, 1/10 となって，順位は D, T, M, G となります。伊藤直人君 (四日市 2) も同様の考えを展開しましたが，少し不正確な部分がありました。

§2. 問題 (2) の解説

この問題の要点を日比野航己君 (大垣北 3) が要領よくまとめてくれました。

	1 位の数	2 位の数	3 位の数	順位の計	平均順位
英子さん	4	1	4	18	2
美子さん	3	3	3	18	2
詩子さん	2	5	2	18	2

平均順位によって順位を決めることは合理的ですが，この場合は全員が 2 位で優劣をつけることができません。優勝した詩子さんの特徴は 2 位が多いということです。これはポイントを付けるとき，2 位をより評価すれば詩子さんが上位になること意味します。例えば，1 位に 3 点，2 位に 2 点，3 位は 0 点とすれば，英子さん 14 点，美子さん 15 点，詩子さん 16 点となって詩子さんが最も高い得点になります。田中裕也君 (東海学園 3) は，この考えを一般化して，1 位に a 点，2 位に b 点，3 位に c 点としたとき，

$a-b=b-c$ ならば 3 人とも同じ点である

$a-b>b-c$ ならば 英子さん，美子さん，詩子さんの順になる

$a-b<b-c$ ならば 詩子さん，美子さん，英子さんの順になる

ことを示しました。このように，1 位と 2 位の差が 2 位と 3 位の差より小さいという評価基準ならば，詩子さんが優勝するという事実は多くの人が指摘していました。この評価基準については「芸術分野である音楽で必要なことは賛否両論が多いものよりも，全員から評価される方がよい」(太田昇吾君 (刈谷 2)) と賛成の人もいましたが，一方で，1 位であることはもっと評価されるべきで，その結果として英子さんが優勝すべきであるという意見もありました。「この方法には賛成しかねる。順位をつけるときに差を付けるのは「負け」ではなくて「勝ち」についてあるべきだ，実力をはかることができるのは「勝ち」についてであり,「負け」ではないからである」(寺川文英君 (東京・駒場 中 3)),「私は「下手でない人」ではなくて「より多くの人をより強く感動させた人」である英子さんを勝たせてあげたい」(河合佑哉君 (名大付属 1))。

上村太一君 (松坂 1) と佐藤秀樹君 (旭丘 1) は 2 人ずつを比較することを試みました。英子さんと美子さんを比べると，5 対 4 で英子さんを上位とする審判員が多くなってい

ます。すなわち，英子 $>$ 美子 です。同様に，美子さんと詩子さんでは 5 対 4 で，美子 $>$ 詩子 です。三段論法なら 英子 $>$ 美子 $>$ 詩子 となって，英子さんの優勝です。ところが，英子さんと詩子さんとを比べると 4 対 5 で詩子さんが上になり，三すくみです (「問題ってよく考えてあるなあ」(佐藤君))。結局この方法では今回は順位が決まりませんが，2 人ずつの比較は重要な考え方と思います。

何人かの人は分散を計算して，詩子さんの分散がもっとも小さい (平均からの散らばりが少ない) から，優勝したとの結論を出していました。一つの考えではありますが，合理的かどうかには疑問があります。

最後に，出題者として詩子さんを優勝者とした一つの理由を書いておきます。それは西野裕樹君 (東海 2) らが解答の中で指摘した「1 位と 2 位の合計がもっとも多い」という事実です。これを論理的に説明してみましょう。3 人の獲得した順位をよい順に並べると

$$
\begin{aligned}
\text{英子さん} &= (1,1,1,1,2,3,3,3,3)\\
\text{美子さん} &= (1,1,1,2,2,2,3,3,3)\\
\text{詩子さん} &= (1,1,2,2,2,2,2,3,3)
\end{aligned}
$$

となります。まず,

$$\text{審査員が 9 人なので，その中間である 5 番目の順位} \tag{2.1}$$

を見ます。この場合は全員 2 位なので優劣が付きません。そのときは

$$\text{2 位までの順位を出した審査員の数} \tag{2.2}$$

を見ます。英子さん $=5$, 美子さん $=6$, 詩子さん $=7$ です。(2.1) を DP = deciding place といい，(2.2) は NDP = number of deciding place と呼ばれます。まず DP が上位の人を選び，同点ならば NDP の大きい人を上位とします (これでも決まらなければ，さらに SDP とか SP という数を出して比較するようですが省略します)。これは何年か前までフィギュアスケートで実際に採用されていた判定法です (順位という相対評価からの判定には問題があるとして現行の絶対評価を基準とする方法に改められたようです)。

§3. 問題 (3) の解説

先にも触れましたが，§2 の結果に異議を唱えたものが多くありました。短所が少ない人よりも長所が多い人をより評価すべきだということだと思います (私もそう思います)。現実の問題に触れた記述もありました。例えばブッシュ対ゴアの前回のアメリカ大統領選のルールの問題点，ボクシングの亀田対ランダエタの疑惑の判定，ワールドカップの前後で 18 位から 49 位となった FIFA の世界ランキングの不明瞭さ，フィギュアスケートの判定の不可解さ，物の価値尺度としての「値段」についてなどです。内山大輝君 (滝 1) は「だれもが納得できるようなランク付けを行うには，基となる明確な視点を提示し，それに沿った基準によりランクを付ける必要がある」と述べて，現在の小学校の通知表では子供たちが自分の長所を自覚できないのではないかと危惧しています。その他,「$\cdots$ さまざまな試合を見ますが，基準を作ることがこんなに難しく,

誰もが合理的だと納得する試合 (コンテスト) はなかなか作れないものだということが問題を通じてよくわかり，たくさんの事を考えるとても良い機会となりました」(坪井康真君 (東海 1)),「ランク付けというのは実力を推し測るのにとても有効な手だてではあるが，それで実力のすべてがわかるわけではない」(相宮聡史君 (長久手 3)) ,「ランク付けは私たちの回りのいたるところにあるように思えてなりません。テレビでは毎日その日の運勢や映画，本の売り上げ等がランク付けされますし，$\cdots$(途中略)$\cdots$ 私たちのような高校生は偏差値やテストの順位などでランク付けされています。なんだか数を使っているようで，数に使われているような気がしてきます。ランク付けは大切なものと思いますが，それにとらわれ過ぎないように気を付けることが必要であると思うのです」(奥崎雄也君 (四日市 2))，など，多くの皆さんがこの問題を通して，ランク付けの問題点や難しさを考えてくれたようで，この少し変わった問題を出題した意義もあったように感じました。

§4. 一つの試み，失敗そして？

平均について再考してみます。平面内の 3 点 $A=(a_1,a_2),\ B=(b_1,b_2),\ C=(c_1,c_2)$ の作る三角形の重心 (x_G,y_G) は a_1,b_1,c_1 と a_2,b_2,c_2 の平均で与えられます。すなわち，

$$x_G=\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\quad y_G=\frac{a_2+b_2+c_2}{3}$$

です。一方，$X=(x,y)$ から 3 点 $A,\ B,\ C$ までの長さの 2 乗の和

$$\begin{aligned}F(X)&=|XA|^2+|XB|^2+|XC|^2\\&=(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(x-c_1)^2+(y-c_2)^2\end{aligned}$$

の値が最小になる X は重心 $X_G=(x_G,y_G)$ です (これは大学初年次に学ぶ微分積分学の威力です)。これから平均は与えられたデータまでの長さの 2 乗の和を最小にする点として特徴付けられることがわかります。これは平面の点だけでなく，3 次元やそれ以上の n 次元でも成り立つことを注意しておきます。

この考察を §2 の問題 (2) に当てはめてみましょう。9 人審査員の判定順位の平均は，いずれも 2 でした。一方，審査員の順位を 3 次元の 9 個の点 (重複する場合も別々に考える)

$$\begin{aligned}&A_1=(1,2,3),\quad A_2=(3,1,2),\quad A_3=(3,2,1)\\&A_4=(1,3,2),\quad A_5=(3,1,2),\quad A_6=(1,2,3)\\&A_7=(3,1,2),\quad A_8=(1,3,2),\quad A_9=(2,3,1)\end{aligned}$$

とみなします。点 $X=(x,y,z)$ から $A=(a,b,c)$ までの長さ $|XA|$ は

$$|XA|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

です。X から各点までの長さの 2 乗の和

$$F(X)=\sum_{j=1}^{9}|XA_j|^2 \tag{4.1}$$

を最小にする問題を考えると，この解が $X_G = (2,2,2)$ であり，平均がいずれも 2 であった事実と繋がります。

さて，上述の議論では X が 3 次元のすべての点を動いたきの (4.1) の最小値を求めています。問題 (2) に限れば，3 人の順序を決めるわけですから X としては，順位として考えられる

$$X_1 = (1,2,3),\quad X_2 = (1,3,2),\quad X_3 = (2,1,3)$$
$$X_4 = (2,3,1),\quad X_5 = (3,1,2),\quad X_6 = (3,2,1)$$

に限定して，

(4.2) X_i の中で (4.1) を最小にするもの

を選べば良いのではないか。そして，この中で最小値を与える X_i がすべての審査員の意見をより多く反映した順位であって，それが最適な順位を与えるのではないか。これが表題に書いた一つの試みです。

ところが，$F(X_i)$ $(i = 1,2,\cdots,6)$ を実際に計算してみたら，すべての i に対して $F(X_i) = 36$ となってしまいました！困った。でも，ちょっと冷静に考えてみればこれは当たり前のことでした。実際，任意の $X = (x,y,z)$ と $X_G = (2,2,2)$ 対して

$$F(X) = F(X_G) + 9|XX_G|^2$$

が成り立ちます (確認してみて下さい)。これより，平均 X_G に近い点であるほど $F(X)$ の値は小さくなります。しかし，今回の場合は，すべての i について $|X_iX_G|^2 = 2$ ですから，$F(X_i)$ がすべて等しいことが導かれ，(4.2) の方法では最適な順位を見つけることは出来ないのです。

実験として，2 乗をしないで，単なる和を最小にすることを試みてみました。すなわち，

(4.3) $H(X) := \displaystyle\sum_{j=1}^{9} |XA_j|$ として，$H(X_i)$ の値を最小にする X_i を見つけよう

ということです。実際に計算すると，$X_5 = (3,1,2)$ のとき最小になり，まったく意外な，美子さん，詩子さん，英子さんの順位となります。これはこの順位を付けた審査員が 3 人と最も多かった事実が影響していると思われますが，(4.3) にどれだけの合理性があるかは，今のところ私にはよくわかりせん。