名城大学数学実践研究報告 第 1 号 (2015)

[論説]

数列を用いた連立方程式の近似解法を題材とする授業の提案

愛木 豊彦♣ (日本女子大学理学部)

Abstract. 連立方程式の近似解を求める方法の一つである反復法（ヤコビ法とガウス・ザイデル法）を高校生用の題材とすることを提案する。そこでは，漸化式で定まる数列に対し，具体的に値を計算することで，ある規則性に気づき，それを証明する。本題材のねらいは，数列の数値解析における役割を理解しその有効性を理解すること，および，規則性の発見およびその証明という過程の経験から数理科学の研究の進め方に興味・関心をもつことである。

Keyword: 連立方程式，数列の漸化式，ヤコビ法，ガウス・ザイデル法

1 序論

現在，小中高校における算数・数学教育では，算数的活動・数学的活動が重視されている。少し古いが，平成 20 年 1 月の中央教育審議会答申で示された学習指導要領改善の基本方針では，「数学的活動を生かした指導を一層充実するため，特に高等学校では，必履修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目に「課題学習」を位置付ける。」と，述べられている (参照 [1])。さらに，[1] には，数学的活動に関して，

> ・自ら課題を見いだし，解決するための構想を立て，考察・処理し，その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり，それを発展させたりすること。
> ・学習した内容を生活と関連付け，具体的な事象の考察に活用すること。
> ・自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり，議論したりすること。
> なお，数学的活動は，コンピュータなどを積極的に活用することによって一層充実したものにすることができる。

と，その内容も示されている。しかし，このような条件を満たす高校生用の適切な題材は少なく，よりよい題材の開発が必要とされている。

一方，現代の科学の研究においては，現象（物理学，化学，生物学，経済学など），コンピュータ，数学の三つが力を合わせ，新たな問題を見出し，その解決に挑んでいる。従って，そのような科学の研究場面の一つを題材とすれば，上述の数学的活動に対する要求も満たされるものと考えた。

そこで本稿では，連立方程式の数値解析的解法の一つである反復法のヤコビ法とガウス・ザイデル法を，数列の漸化式の活用例として取り上げる。これを題材として取り上げたのは，次の三つの理

由による。

まず第一に，数列は連立方程式に限らず数値解析的に，種々の近似値を求める際必要不可欠であるなど，活用の具体例が数多くあるにも関わらず，学習者にとっては，苦手意識が強く，その有用性が理解されていない。数列の中でも，漸化式は解法の難しさからか，この傾向が強いようである。本論文で紹介する題材の解決を通し，数列を考える意義を理解させたい。特に，漸化式の僅かな修正により，収束速度が倍になることを示し，数値解析全般に興味を持たせたい。

二つ目の理由は，題材の適切性である。もともとこの題材は，筆者が高校生対象の出前授業で用いて，その後，筆者の所属する大学で実施される大学祭において，その発展を学生が研究し，発表した内容である。その過程で，統計処理ソフトを用いて，数列の値の変化を表したり，自分たちで課題を見つけ，調べるなどの活動をしていたので，本題材は，高校生用の課題学習として十分に扱える内容だと判断した。

三つ目の理由は，後に詳述するが，題材の解決過程において，規則性の発見，そして，その証明という活動を伴うからである。高校で学ぶ内容にふさわしい規則性の発見により，学習意欲も高まり，何よりも，自ら課題を見出し，それが正しいことを証明するという科学の研究過程の面白さを伝えたい。

本稿の構成は次の通りである。次節で発展を含めて題材の詳細な内容を示し，3 節で実践の様子を紹介し，最後に今後の課題を述べる。

2 ヤコビ法とガウス・ザイデル法

以下，[2, 3] に従い，ヤコビ法とガウス・ザイデル法による連立方程式の近似解の求め方を紹介する。

N 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ と N 次元ベクトル $b=(b_j)$ に対し，連立方程式

$$Ax=b \tag{1}$$

を満たす N 次元ベクトル $x=(x_j)$ を求める。ここでは，反復法を用いて，x の近似値を求めることにする。つまり，適当な N 次元ベクトル $x^{(0)}$ に対し，$x^{(n)}\to x(n\to\infty)$ となる N 次元ベクトル $x^{(n)}(n=1,2,\cdots)$ の列 $\{x^{(n)}\}$ を構成する。

解 x に対し，

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{2}$$

が成り立つので，もし，A のすべての対角成分が非零ならば，(2) より，

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j) \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{3}$$

を得る。ここで，(3) の右辺に現れる x_j を $x_j^{(n)}$，左辺を $x_j^{(n+1)}$ とみる。つまり，漸化式

$$x^{(n+1)}=B^{-1}(b-(A-B)x^{(n)}) \tag{4}$$

によって，$\{x^{(n)}\}$ を定める。ここで, $B=(a_{ij}\delta_{ij})$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。このとき，次が成り立つ。

定理 2.1 ([3, 定理 8.4]) 行列 A が,

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots) \tag{5}$$

を満たすとき，*(4)* で定まる数列は，任意の初期値に対し，*(1)* の解に収束する。

このように，(4) で定まる数列によって，連立方程式の近似解を求める方法をヤコビ法という。次に，これを改良したガウス・ザイデル法を紹介する。

まず，A を次のように，行列 D, E, F に分解する。

$$A=D+E+F,$$

ここで，

$$D=(d_{ij}),E=(e_{ij}),F=(f_{ij}),d_{ij}=a_{ii}\delta_{ij},$$

$$e_{ij}=\begin{cases}0 & (i\leq j),\\ a_{ij} & (i<j),\end{cases} \quad f_{ij}=\begin{cases}0 & (i\geq j),\\ a_{ij} & (i>j),\end{cases}$$

である。このとき，A のすべての対角成分が非零であれば，$D+E$ の逆行列が存在するので，

$$x^{(n+1)}=(D+E)^{-1}M(b-(A-I)x^{(n)}) \tag{6}$$

は定義可能である。ただし，$M=-F$ である。この漸化式によって定まる $\{x^{(n)}\}$ によって，連立方程式の近似解を求める方法を，ガウス・ザイデル法という。ガウス・ザイデル法についても，定理 2.1 と同様な結果が成り立つ。さらに，収束に関するより精密な結果として，次が成り立つ。

定理 2.2 ([3, 定理 8.5], [4, Theorem 5.6.1]) 行列 A に対し，A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$（重複しても良い）とするとき，*(4)* または *(6)* で定まる数列が，任意の初期値に対し解に収束するための必要十分条件は，

$$\max_{1 \le i \le N} |\lambda_i| < 1 \tag{7}$$

である。

定理 2.1, 定理 2.2 からわかるように，(7) や (5) が成り立てば，ヤコビ法やガウス・ザイデル法が有効となる。条件 (7) が成り立つかどうかを確認するためには，固有値を求めなければならないが，(5) が成り立つかどうかは，簡単に判断できる。また，(5) は強い条件のように見えるが，偏微分方程式の近似解を求める際には，(5) が満たされることが多く，実用上はこれで十分である。

次に，高校生でも考察できるような 2 元または 3 元連立方程式に対するヤコビ法やガウス・ザイデル法について述べる。まず，次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f, \end{cases} \tag{8}$$

を満たす (x, y) を求める問題を考える。この連立方程式 (8) に対するヤコビ法によって定まる漸化式は，

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{a}(e - by_n), \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{d}(f - cx_n), \end{cases} \tag{9}$$

である。または，(8) の式を入れ替えた結果得られる

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{c}(f - dy_n), \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{c}(e - ax_n), \end{cases} \tag{10}$$

で定まる数列 $\{(x_n, y_n)\}$ である。このとき，次の定理が成り立つ。

定理 2.3 *(8)* の係数に対し，$ad - bc \neq 0$ かつ $abcd \neq 0$ ならば，*(9)* または *(10)* で定まるいずれかの数列は収束する。

(証明) 仮定より $abcd \neq 0$ なので，(9), (10) はともに定義可能である。

次に，$ad \neq bc$ より，連立方程式 (8) は一意解をもつので，それを (α, β) とおく。また，$|ad| > |bd|$ または $|ad| < |bd|$ である。以下，$|ad| > |bd|$ のときを考える。この場合，(9) で数列 $\{(x_n, y_n)\}$ を定義する。

$$z_n = x_n - \alpha, w_n = y_n - \beta$$

とおくと，

$$z_{n+1} = \frac{b}{a} w_n, w_{n+1} = \frac{c}{d} z_n$$

より，

$$z_{n+1} = \frac{bc}{ad} z_{n-1}$$

となる。よって，

$$z_{2k} = (\frac{bc}{ad})^k z_0,$$

$$z_{2k+1} = (\frac{bc}{ad})^k z_1 = (\frac{bc}{ad})^k \frac{b}{a} w_0$$

$k = 1, 2, \cdots$ なので，$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0$, つまり，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

が成り立つ。$|ad| < |bd|$ の場合も同様に証明できる。 □

3 元連立方程式は，下記例 2.1 のように，どのように式を入れ替えても，ヤコビ法で近似解を得られない場合がある。

例 2.1 連立方程式

$$\begin{cases} x + 7y + 8z = 0, \\ 9x + 2y + 4z = 0, \\ 6x + y + z = 0, \end{cases}$$

を考えるこの場合，係数行列の行列式の値は 127 なので，解は一意に定まるが，ヤコビ法では解を求められない。実際にヤコビ法で定まる数列の値をグラフに表すと次のようになる。以下の図 1, 図 2, 図 3 は，それぞれ方程式を以下のように並べてときにヤコビ法を適用して (x_n, y_n, z_n) を求めたものである。

$$\begin{cases} x + 7y + 8z = 0, \\ 9x + 2y + 4z = 0, \\ 6x + y + z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 2y + 4z = 0, \\ x + 7y + 8z = 0, \\ 6x + y + z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + y + z = 0, \\ x + 7y + 8z = 0, \\ 9x + 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

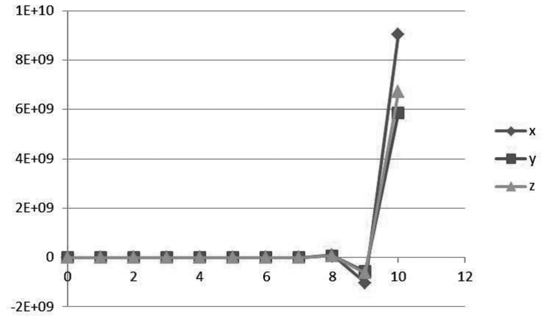


図 1:

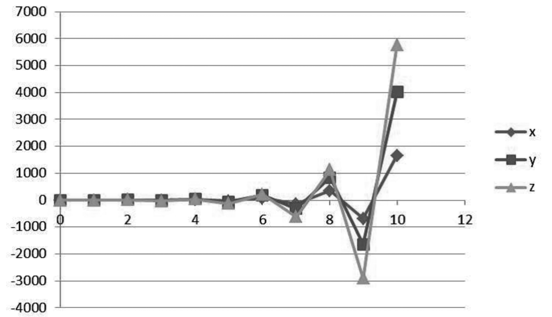


図 2:

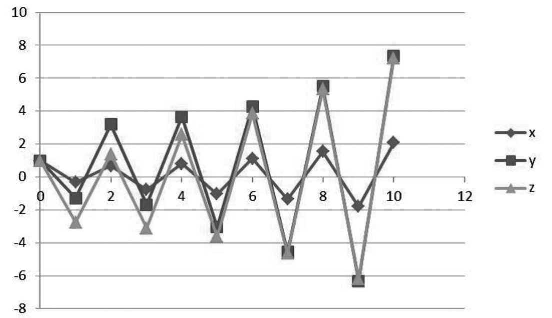


図 3:

これらのグラフでは，横軸は n を，縦軸は各項の値を示している。このように，n の値が大きくなるにつれ，各項の値が大きくなり，解 $(0, 0, 0)$ に近づかないことが分かる。

次に，ヤコビ法とガウス・ザイデル法の収束速度の違いを示す。以下，次の連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ -x + 2y = 5, \end{cases} \tag{11}$$

を考える。この方程式に対するヤコビ法が定める漸化式は，

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{2} y_n, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} x_n + \dfrac{5}{2}, \end{cases} \tag{12}$$

である。ここで，$x_0 = 0, y_0 = 0$ として，(12) より，数列 $\{(x_n, y_n)\}$ の各項の値を求めると，

n	x_n	y_n
0	0	0
1	0	2.5
2	-1.25	2.5
3	-1.25	1.875
4	-0.9375	1.875
5	-0.9375	2.03125
6	-1.015625	2.03125
7	-1.015625	1.9921875
8	-0.99609375	1.9921875
9	-0.99609375	2.001953125
10	-1.000976563	2.001953125

表 2.1

となる。これに対し，ガウス・ザイデル法が定める漸化式は，

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{2} y_n, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} x_{n+1} + \dfrac{5}{2}, \end{cases} \tag{13}$$

である。上と同じく，$x_0 = 0, y_0 = 0$ として，(13) より，数列 $\{(x_n, y_n)\}$ の各項の値を求めると，

n	x_n	y_n
0	0	0
1	0	2.5
2	-1.25	1.875
3	-0.9375	2.03125
4	-1.015625	1.9921875
5	-0.99609375	2.001953125
6	-1.000976563	1.999511719
7	-0.999755859	2.00012207
8	-1.000061035	1.999969482
9	-0.999984741	2.000007629
10	-1.000003815	1.999998093

表 2.2

ここで，表 2.1 と表 2.2 を比較すると，ガウス・ザイデル法の方が，ヤコビ法よりも 2 倍の速さで計算できることが予想できる。実際，(12) から，一般項を求めると，

$$x_n = \begin{cases} -1-\dfrac{5}{4}(-\dfrac{1}{4})^{m-1} & n=2m \text{ のとき}, \\ -1+(-\dfrac{1}{4})^{m} & n=2m+1 \text{ のとき}, \end{cases} \tag{14}$$

$$y_n = \begin{cases} 2-2(-\dfrac{1}{4})^{m-1} & n=2m \text{ のとき}, \\ 2+\dfrac{5}{2}(-\dfrac{1}{4})^{m} & n=2m+1 \text{ のとき}, \end{cases} \tag{15}$$

となり，(13) から，一般項を求めると，

$$x_n = -1-\frac{1}{2}(-\frac{1}{4})^n, y_n = 2+2(-\frac{1}{4})^n, \tag{16}$$

となる。これらから，ガウス・ザイデル法で定まる数列が，ヤコビ法で定まる数列と比較して 2 倍の速さで収束することが分かる。

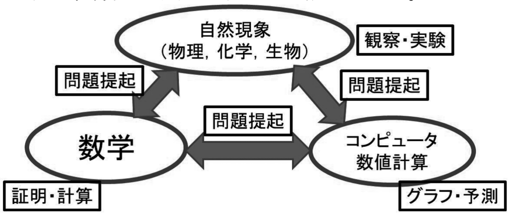
3 実践報告

前節の内容を，神奈川県のある高校で，出前授業として高校 2 年生を対象に実践した。その概要は次の通りである。

- 日付: 平成 25 年 9 月 18 日
- 時間: 13 時 40 分から 14 時 30 分
- 参加人数: 9 名
- 授業名: 数理科学の紹介「連立方程式と数列の役割」

授業の展開案を示す。

1. 数理科学における，数学，コンピュータ，自然現象の関係を下図を用いて説明する。



2. コンピュータで計算したことに対し，ある予想を立てて，それを数学的にきちんと証明する具体例として，ヤコビ法とガウス・ザイデル法を紹介する。
3. ヤコビ法とガウス・ザイデル法で定まる数列の各項を電卓を用いて計算し，表 2.1 と表 2.2 を得る。
4. これらの表から，ガウス・ザイデル法がヤコビ法に比べて 2 倍速いという予想を立てる。
5. 漸化式から (14), (15), (16) を示し，予想が正しいことを証明する。
6. もう一度，数学，コンピュータ，自然現象の関係について説明する。

実際には，上記展開の 1, 2, 3 に時間がかかり，4 の予想を立てるところで，授業が終了した。この段階までの生徒の様子から，ガウス・ザイデル法が 2 倍速いことを予想できると判断した。従って，この内容は高校 2 年生でも十分理解可能であるが，授業時間を 2 時間 (100 分程度) 確保する必要があることが分かった。

4 今後の課題

授業実践において，生徒が表を作成していく段階で，ヤコビ法とガウス・ザイデル法の違いに気づくことができたので，改めて，予想を立てるには，表を作るなどの活動が有効であると感じた。

また，大学生が例 2.1 について考える際，統計処理ソフトを用いて，図 1 ～ 3 のようなグラフをかいていた。このように，漸化式で定まる数列は，プログラミングや数式処理ソフトを用いなくても，統計処理ソフトで十分に考察可能である。従って，

数式の漸化式は高校における課題学習用の題材の候補の一つであると言って良い。

最後に，2013 年の目白祭（日本女子大学大学祭）で，本題材について研究した，当時の理学部数物科学科学生，原明日香，福本真子，山内泉季，吉岡梓に改めて感謝いたします。

参考文献

[1] 文部科学省，2009，高等学校学習指導要領解説，数学編.（平成 21 年 11 月）

[2] 河村哲也，2006, 数値計算入門，サイエンス社.

[3] 洲之内治男，1978, 数値計算，サイエンス社.

[4] G. Dahlquist，Å. Björk，2003，Numerical Methods, Dover Publications

♣：aikit@fc.jwu.ac.jp