

研究集会

Winter Workshop 2008 on
Low-Dimensional Topology and
its Ramifications

講演レジュメ集

2008年2月

大阪市立大学

本稿は、21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成」(Constitution of wide-angle mathematical basis focused on knots) (拠点リーダー河内明夫)の事業の一環として、平成19年度科学研究費補助金(若手研究(B))『交代結び目に沿った例外的デーモン手術の最大個数決定』(研究代表者：市原一裕)、平成19年度科学研究費補助金(若手研究(B))『ダイアグラムの性質が与える結び目の幾何と代数的不変量の研究』(研究代表者：中村拓司)、平成19年度科学研究費補助金(若手研究(B))『空間グラフの不変量と正則射影図の研究』(研究代表者：新國亮)、および平成19年度科学研究費補助金(特別研究員奨励費)『結び目・3次元多様体の量子不変量が反映する幾何的・大域的性質について』(研究代表者：長郷文和)の援助により、平成20年2月13日(水)から2月15日(金)の期間、大阪市立大学 杉本キャンパス(大阪市住吉区杉本3丁目3番138号)に於いて開催された研究集会『Winter Workshop 2008 on Low-Dimensional Topology and its Ramifications』の講演レジュメ集です。

この研究集会は、Post Doctor や博士・修士課程の学生を中心に、各々の最新研究結果やその問題点などを紹介し、数学的交流を深めることを目的として開催されました。参加者は50名に達し、4件の主講演と、その他の14件の講演において、活発な議論が行われました。また、講演以外においても、参加者間の活発な研究交流が行われました。

本稿を作成するにあたり、講演者には、非常に丁寧な講演レジュメを作成して頂きました。また、大阪大学、大阪市立大学、奈良女子大学と広島大学の大学院生の参加者には、本稿作成に係わる様々な作業を手伝って頂きました。世話人一同、深く感謝申し上げます。

2008年2月

世話人：

長郷 文和 (東京工業大学)

市原 一裕 (奈良教育大学)

中村 拓司 (大阪電気通信大学)

新國 亮 (金沢大学)

田中 心 (学習院大学)

岩切 雅英 (大阪市立大学数学研究所)

ON THE ALTERNATION NUMBER

TETSUYA ABE

1. 講演の概要

講演の前半は結び目の交代化数について話す。結び目の交代化数とは結び目を交代結び目にするために必要な交差交換の最小回数のことであり、最近河内先生により導入されたものである [3]。結び目 K の交代化数を $\text{alt}(K)$ と書くことにする。交代化数の定義自体は非常に簡単なのであるが、交代化数 2 以上の結び目が存在することを証明する道具は存在しなかった。その為、交代化数が研究対象となることはなかった。最近、交代化数を下から評価する不変量が二つ見つかった。一つはある種の中西指数 [3] であり、もう一つは、ラスムッセン不変量と結び目の符号数との差 [1] である。後者の評価をトールス結び目 $T(p, q)$ に当てはめることにより、次が得られる。

Theorem 1.1 ([1]). 以下が成り立つ。

- (i) $\text{alt}(T(p, q)) = 0 \iff p = 2$.
- (ii) $\text{alt}(T(p, q)) = 1 \iff (p, q) = (3, 4) \text{ or } (3, 5)$.
- (iii) $\text{alt}(T(p, q)) \geq 2 \iff \text{その他}$.

講演の後半は、概交代結び目について話す。概交代結び目は、あるクラスの結び目が双曲であることを示すときに非常に有効である。

概交代結び目とは非交代結び目であり、ちょうど一箇所の交差交換をすると交代図式になる図式を持つ結び目である。アダムス達により、概交代結び目はトールス結び目か双曲結び目である [2] ことがわかっている（つまり、サテライト結び目ではない）。また、概交代結び目の交代化数は 1（逆は成り立たない）なので、定理 1.1 より

Corollary 1.2 ([1]). 概交代トールス結び目は、 $T_{3,4}$ と $T_{3,5}$ だけである。

であることがわかる。まとめると

Corollary 1.3. 概交代結び目は、 $T_{3,4}$ か $T_{3,5}$ か双曲結び目である。

となる。概交代結び目の代表的な例は、非交代モンテシノス結び目や semi-alternating 結び目である。いままでの述べた結果（とメナスコの結果 [4]）より、

Corollary 1.4. モンテシノス結び目は $T(2, q)$, $T(3, 4)$, $T(3, 5)$ 又は、双曲結び目である。

Corollary 1.5. *Semi-alternating* 結び目は双曲結び目である。

などがわかる。これらのことを解説する。

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57M25.

Key words and phrases. Alternation number; almost alternating; signature of a knot; Rasmussen s -invariant.

REFERENCES

- [1] T. Abe, “An estimation of the alternation number of a torus knot”, accepted by JKTR.
 - [2] C. Adams, J. Brock, J. Bugbee, T. Comar, K. Faigin, A. Huston, A. Joseph and D. Pesikoff, “Almost alternating links”, *Topology and its Appl.* **46**, (1992), 151–165.
 - [3] A. Kawauchi, “On alternation numbers of links”, preprint.
 - [4] W. Menasco, “Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements”, *Topology* **23** (1984), no. 1, 37–44.
 - [5] J. Rasmussen, “Khovanov homology and the slice genus”, to appear in *Invent. Math.*
- Department of Mathematics, Osaka City University, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka
558-8585, Japan
E-mail address: `t-abe@sci.osaka-cu.ac.jp`

On Alexander polynomials of alternating knots of genus two

In Dae JONG (鄭 仁大)

2008 年 2 月 13 日

1 導入

3 次元球面 S^3 内の結び目 K のアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ とは, 整数係数ローラン多項式環 $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ に値をとる, Λ の単元倍を法とした結び目不変量であり [1], 次の 2 つの性質によって特徴付けられることが知られている [11]:

- (i) $\Delta_K(t^{-1}) \doteq \Delta_K(t)$.
- (ii) $\Delta_K(1) = \pm 1$.

ここで, \doteq は, “ Λ の単元倍を法として等しい” を意味する.

$[f(t)]_\alpha$ を多項式 $f(t)$ の α 次係数とする. アレクサンダー多項式は Λ の単元倍を法としての不変量なので, これについて考えるときは多項式の標準形を 1 つ固定して考えることが多い. ここでは特に断らない限り, アレクサンダー多項式は $\text{mindeg } \Delta(t) = 0$ かつ $[\Delta(t)]_0 > 0$ を満たすと仮定する.

結び目のアレクサンダー多項式の特徴付けは上記のように与えられているが, 交代結び目のアレクサンダー多項式の特徴付けはまだ知られていない. この問題に関する先行結果として, ここでは R. H. Crowell と K. Murasugi が独立に示した主張と, P. Ozsváth と Z. Szabó によって示された主張を紹介しておく.

命題 1.1 ([3],[8]). L を非分離交代絡み目, $g(L)$ を L の種数, $\mu(L)$ を L の成分数とする. このとき,

- $\deg \Delta_L(t) = 2g(L) + \mu(L) - 1$,
- $[\Delta_L(-t)]_i > 0$ for $i = 0, 1, \dots, \deg \Delta_L(t)$

となる.

命題 1.2 ([9]). K を交代結び目, $\sigma = \sigma(K)$ を K の符号数とする. また, $\Delta_K(t)$ は $\Delta(1) = 1$ かつ $\text{mindeg } \Delta = 0$ を満たすようにとる. このとき, 任意の非負整数 s に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$(-1)^{s+\frac{\sigma}{2}} \left(\sum_{j=1}^{g(K)-s} j [\Delta_K(t)]_{g(K)-s-j} - \max(0, \lceil \frac{|\sigma| - 2|s|}{4} \rceil) \right) \leq 0. \quad (1)$$

これら二つの主張は, 多項式が交代結び目のアレクサンダー多項式であるための必要条件を与えている. ここでは, 種数 2 の交代結び目に関してさらに強い必要条件を与えることが出来たので, それを紹介する.

定理 1.3. K を種数 2 の交代結び目とする. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$3[\Delta_K(-t)]_0 - 1 \leq [\Delta_K(-t)]_1 \leq 6[\Delta_K(-t)]_0 + 1 \text{ if } \sigma(K) = 0, \quad (2)$$

$$2[\Delta_K(-t)]_0 + 1 \leq [\Delta_K(-t)]_1 \leq 6[\Delta_K(-t)]_0 - 1 \text{ if } |\sigma(K)| = 2, \quad (3)$$

$$2[\Delta_K(-t)]_0 - 1 \leq [\Delta_K(-t)]_1 \leq 4[\Delta_K(-t)]_0 - 2 \text{ if } |\sigma(K)| = 4. \quad (4)$$

さらに, 種数 2 の交代結び目の $[\Delta(-t)]_0$ と $[\Delta(-t)]_1$ に関する任意の線形不等式は, これらの帰結として得られる.



図 1 \bar{t}_2 move

2 定理 1.3 の証明の概略

補題 2.1 ([12], see also [2], pp. 112–113). 任意の種数 2 交代結び目は, 図 2 のあるダイアグラムに \bar{t}_2 move, フライプ, 鏡像をとる, の 3 種類の操作を有限回繰り返すことで得られるダイアグラムを持つ. 図 2 に描かれた結び目を, 種数 2 結び目のジェネレータと呼ぶ.

ここで, 定理 1.3 の証明の概略を述べる. まず, 交代結び目の交代ダイアグラムに \bar{t}_2 move を施しても, 結び目の符号数が保たれることを示す. 次に, 交代ダイアグラムに \bar{t}_2 move を施すことで, アレクサンダー多項式がどのように変化するかを調べる. そして, \bar{t}_2 move を任意回数施したとき, $\frac{[\Delta]_1(-t)}{[\Delta]_0(-t)}$ が最小となるケースと最大となるケースを見つけることで, $[\Delta(-t)]_1$ と $[\Delta(-t)]_0$ の間に線形不等式を得ることが出来る.

3 $[\Delta]_0 \leq 3$ を満たす種数 2 交代結び目の特徴付け

既約交代ダイアグラムに \bar{t}_2 move を施すと, アレクサンダー多項式の各係数の絶対値は必ず増えることが示せる. この事実より, 種数 2 交代結び目で $[\Delta(t)]_0 \leq 3$ を満たすものは, ジェネレータに高々 2 回の \bar{t}_2 move を施すことで, 全て得られることがわかる.

命題 3.1 ([4]). 種数 2 の交代結び目で, $[\Delta(t)]_0 = 1$ を満たすもの (即ち, 種数 2 交代ファイバー結び目) は, 次の結び目が全てである (up to mirror image): $5_1, 6_2, 6_3, 7_6, 7_7, 8_{12}, 3_1\#3_1, 3_1\#3_1^*, 3_1\#4_1, 4_1\#4_1$.

種数 2 の交代結び目で, $[\Delta(t)]_0 = 2$ を満たすものは, 次の結び目が全てである (up to mirror image): $7_3, 7_5, 8_4, 8_6, 8_8, 8_{11}, 8_{13}, 8_{14}, 9_8, 9_{12}, 9_{14}, 9_{15}, 9_{19}, 9_{21}, 9_{37}, 10_{13}, 10_{35}, 3_1\#5_2, 3_1\#5_2^*, 3_1\#6_1, 3_1\#6_1^*, 4_1\#5_2, 4_1\#6_1$.

種数 2 の交代結び目で, $[\Delta(t)]_0 = 3$ を満たすものは, 次の結び目が全てである (up to mirror image): $9_4, 9_7, 10_4, 10_7, 10_{10}, 10_{20}, 10_{34}, 10_{36}, 11_{13}, 11_{59}, 11_{65}, 11_{195}, 11_{211}, 11_{214}, 11_{230}, 12_{197}, 12_{691}, 3_1\#7_2, 3_1\#7_2^*, 3_1\#8_1, 3_1\#8_1^*, 4_1\#7_2, 4_1\#8_1$.

命題 3.1 に挙げられている結び目のアレクサンダー多項式を計算することで, 次の系を得る.

系 3.2 ([4]). 以下のアレクサンダー多項式は, 交代結び目のそれとして実現されない.

$$\begin{aligned}
 & 1 - n_1 t + (2n_1 - 1)t^2 - n_1 t^3 + t^4 \text{ for } n_1 = 4 \text{ or } n_1 \geq 8, \\
 & 1 - n_2 t + (2n_2 - 3)t^2 - n_2 t^3 + t^4 \text{ for } n_2 \geq 6, \\
 & 2 - n_3 t + (2n_3 - 3)t^2 - n_3 t^3 + 2t^4 \text{ for } n_3 = 8 \text{ or } n_3 \geq 14, \\
 & 2 - n_4 t + (2n_4 - 5)t^2 - n_4 t^3 + 2t^4 \text{ for } n_4 \geq 12 \\
 & 3 - n_5 t + (2n_5 - 5)t^2 - n_5 t^3 + 3t^4 \text{ for } n_5 = 6, 10, 14, 18, \text{ or } n_5 \geq 20, \\
 & 3 - n_6 t + (2n_6 - 7)t^2 - n_6 t^3 + 3t^4 \text{ for } n_6 = 8, 16, \text{ or } n_6 \geq 18
 \end{aligned}$$

注意 3.3. 上記の条件 $n_1 \geq 8, n_2 \geq 6, n_3 \geq 14, n_4 \geq 12, n_5 \geq 20, n_6 \geq 18$ は, 定理 1.3 から直ちに得られるが, 条件 $n_1 = 4, n_3 = 8, n_5 = 6, 10, 14, 18, n_6 = 8, 16$ は, 定理 1.3 からは得ることができない.

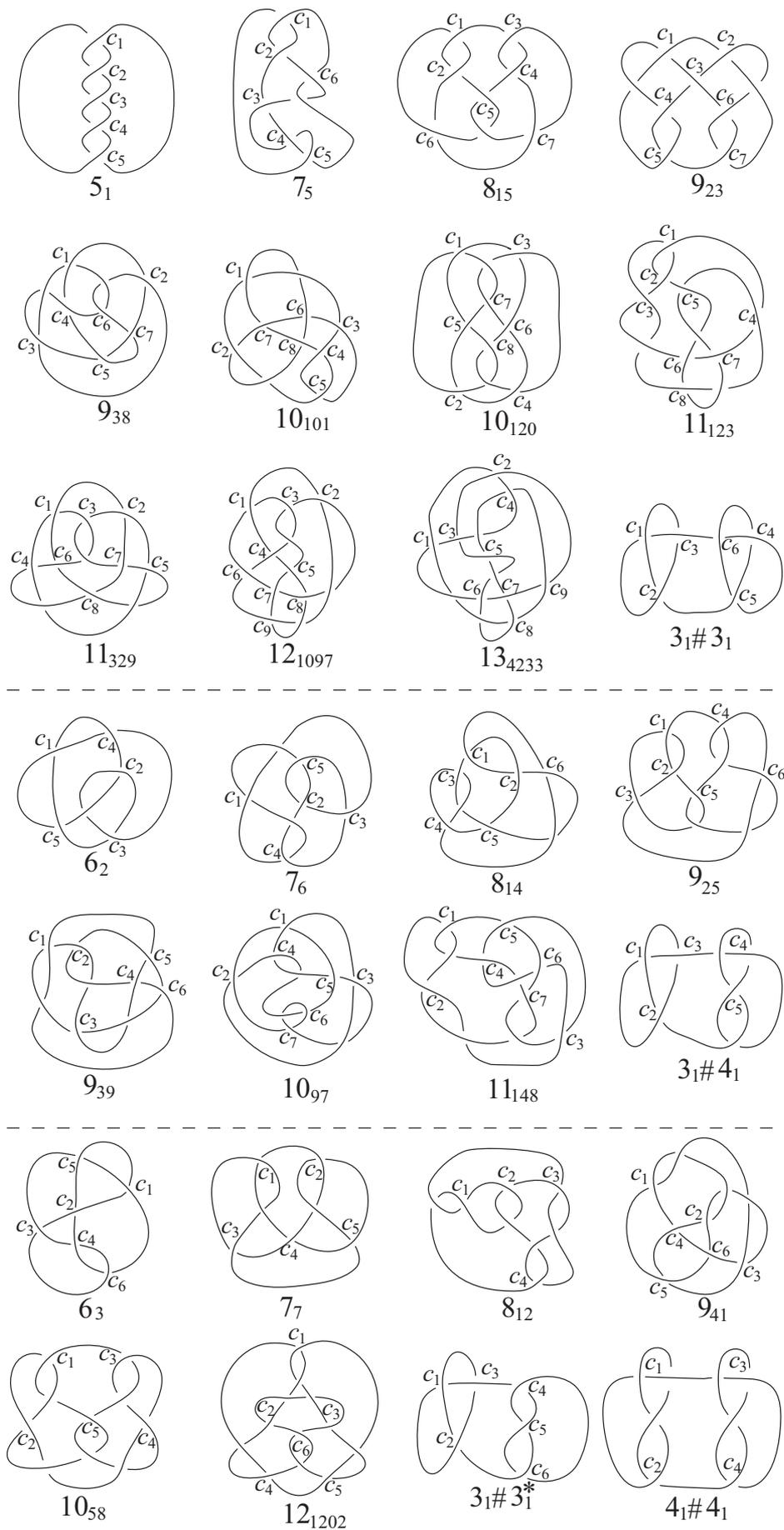


図2 種数2交代結び目のジェネレータ
3

K	$([\Delta(-t)]_0, [\Delta(-t)]_1, [\Delta(-t)]_2)$	$ \sigma $	alternating knot
8_{20}	(1, 2, 3)	0	$3_1\#3_1, 3_1\#3_1^*$
8_{21}	(1, 4, 5)	2	$3_1\#4_1$
9_{44}	(1, 4, 7)	0	\nexists
9_{45}	(1, 6, 9)	2	\nexists
9_{48}	(1, 7, 11)	2	\nexists
10_{132}	(1, 1, 1)	0	5_1
10_{133}	(1, 5, 7)	2	7_6
10_{136}	(1, 4, 5)	2	$3_1\#4_1$
10_{137}	(1, 6, 11)	0	$4_1\#4_1$
10_{140}	(1, 2, 3)	0	$3_1\#3_1, 3_1\#3_1^*$
10_{129}	(2, 6, 9)	0	8_8
10_{130}	(2, 4, 5)	0	7_5
10_{131}	(2, 8, 11)	2	$8_{14}, 9_8$
10_{146}	(2, 8, 13)	0	\nexists
10_{147}	(2, 7, 9)	2	8_{11}
10_{166}	(2, 10, 15)	2	9_{15}
9_{49}	(3, 6, 7)	4	\nexists
10_{135}	(3, 9, 13)	0	10_{34}
10_{144}	(3, 10, 13)	2	$3_1\#8_1, 3_1^*\#8_1$
10_{163}	(3, 9, 11)	2	10_{20}
10_{165}	(3, 11, 17)	0	10_{10}

表 1 交代結び目のアレクサンダー多項式に“似た”それを持つ 10 交点以下の素な非交代結び目

4 10 交点以下の非交代結び目について

最後に, 10 交点以下の非交代結び目について, 交代結び目のアレクサンダー多項式の観点から考察する. D. Rolfsen による 10 交点以下の素な結び目の表 [10] に含まれている非交代結び目は全て $[\Delta(t)]_0 \leq 3$ を満たしている. 交代結び目のアレクサンダー多項式は命題 1.1, 1.2, 及び定理 1.3 に記されている性質を持つ. 一方で, アレクサンダー多項式がそれらの性質を満たすような非交代結び目も存在する, 即ち, アレクサンダー多項式が交代結び目のそれに“似ている”非交代結び目が存在する. 表 1 で, そのような素な非交代結び目で, $\deg \Delta = 4$ を満たす 10 交点以下のものをリストアップする. 表において, 非交代結び目と同じ多項式を持つ交代結び目が存在する場合は, 表の“alternating knot”の列にそのような交代結び目が記されている. さらに, 命題 3.1 より, このような交代結び目が存在するとき, 表に記してあるもの以外は存在しないことが言える (up to mirror image). また, そのような交代結び目が存在しない場合は, “ \nexists ”が記されている. この非存在性は系 3.2 より従う.

以下では, 表 1 の多項式が一致する結び目について考察する.

K を図 3 の左側に描かれているような, タングル T の閉方として表されている結び目とする. このとき, 図 3 の右側にある結び目 K_n を K の対称和という [7].

命題 4.1 ([7]). 任意の整数 n に対して, $\Delta_{K_n}(t) = \Delta_K(t)^2$ が成り立つ.

特に, K_0 ($n = 0$ の場合) は, K と K^* の連結和である. この意味で, 対称和は連結和の一般化であるといえる. 表 1 に含まれている対称和は以下のものである:

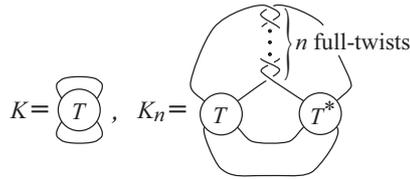


図3 対称和

$$K_0 = 3_1 \# 3_1^*, K_2 = 8_{20}, K_4 = 10_{140} \text{ if } K = 3_1.$$

$$K_0 = 4_1 \# 4_1, K_2 = 10_{137} \text{ if } K = 4_1.$$

T. Kanenobu によって, スケイン多項式が一致する結び目の無限列 $\{K(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ が構成された [6]. 結び目 $K(a, b)$ は図4に描かれているもので, 図中の箱は a (b) 回の半捻りを意味する. $K(a, b)$ のアレクサンダー多項式は, 次の命題で得られる.

命題 4.2 ([5]). $\Delta_{K(a, b)} = \Delta(\varepsilon, \delta)$ ($\varepsilon \equiv a, \delta \equiv b \pmod{2}$). ここで, $\Delta(0, 0) = 1 - 6t + 11t^2 - 6t^3 + t^4$, $\Delta(0, 1) = \Delta(1, 0) = 2 - 6t + 9t^2 - 6t^3 + 2t^4$, $\Delta(1, 1) = 1 - 3t + 5t^2 - 7t^3 + 5t^4 - 3t^5 + t^6$ である.

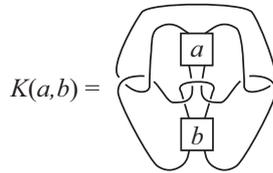


図4 Kanenobu's knots

表1に含まれる結び目 $K(a, b)$ は以下のものである:

$$K(0, -1) = 8_8, K(2, -1) = 10_{129},$$

$$K(0, 0) = 4_1 \# 4_1, K(2, 0) = 10_{137}.$$

参考文献

- [1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 275–306.
- [2] P. R. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] R. H. Crowell, *Genus of alternating link types*, Ann. of Math. **69** (1959), no. 2, 258–275.
- [4] I. D. Jong, *Alexander polynomials of alternating knots of genus two*, preprint (2007).
- [5] T. Kanenobu, *Examples on polynomial invariants of knots and links*, Math. Ann. **275** (1986), 555–572.
- [6] ———, *Infinitely many knots with the same polynomial invariant*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 1, 158–162.
- [7] S. Kinoshita and H. Terasaka, *On unions of knots*, Osaka Math. J. **9** (1957), 131–153.
- [8] K. Murasugi, *On the genus of the alternating knot I, II*, J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 94–105, 235–248.
- [9] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Heegaard Floer homology and alternating knots*, Geom. Topol. **7** (2003), 225–254.
- [10] D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea publishing, 2003.
- [11] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, Math. Ann. **110** (1935), 571–592.
- [12] A. Stoimenow, *Knots of genus two*, to appear in Fund. Math. (2008).

On finite type invariants for curves by using word theory

伊藤 昇 (早稲田大学)

1 主題

The Vassiliev Conjecture.

有限型不変量全体は結び目を完全に分類する.

問題を簡単にして曲線の場合について考えると, これは正しい.
すなわち, 曲線に対する有限型不変量全体は曲線を完全に分類する.

2 講演で行うこと

語を用いて曲面上の曲線の完全不変量となるような有限型不変量を構成する.

3 講演手順

次の題目で話を進める (講演時間 20 分: 2, 3, 10, 11 は 1 分 + α , 他約 2 分)

1. 結び目の有限型不変量の定義
2. この講演の主題
3. 曲線と語の関係
4. 曲線と符号付き語の関係
5. 曲線の有限型不変量 (準備)
6. 曲線の有限型不変量の定義
7. 不変量構成準備 (Step 1 基点の影響をなくす準備)
8. 不変量構成準備 (Step 2 基点の影響をなくす)

9. 不変量構成準備 (Step 3 写像の構成)
10. 完全不変量 : Signed Curve Invariants SCI_n
11. SCI_n は有限型不変量

4 背景

曲線に対応する語とは、文字に対して異なる2元(例えば -1 か 1)のいずれかが割り振られている文字列のことである。この語の集合は適当な同値関係を入れることにより、曲面上の曲線と1対1に対応する(結び目に対応する語も同様の構成である。)

語の結び目理論への応用はトラエフ (V. Turaev) によってなされた [Tu]。トラエフは、ジョーンズ多項式やカンドルの類似物といった結び目の不変量を構成するために、それぞれ結び目のどんな情報を使っているのかを語を用いてみている。

一方、ヴァシリエフ (V. A. Vassiliev) が結び目の量子不変量を低次項から近似する、有限型不変量を導入した。また、アーノルド (V. I. Arnold) はヴァシリエフの考えを平面曲線に適用して平面曲線に対する次数1の有限型不変量を構成し [Ar]、ポリヤク (M. Polyak) がそれを整理し直した [Po]。

今回構成した不変量はアーノルドの不変量と明示的な関係がつく。

参考文献

- [Ar] V. I. Arnold, *Topological invariants of plane curves and caustics*, University Lecture Series **5**, Providence, RI, 1994.
- [O] Y. Ohyaama, *Vassiliev invariants and local moves of knots*, Rokko Lectures in Mathematics **15**, 2003 (in Japanese).
- [Po] M. Polyak, *Invariants of curves and fronts via Gauss diagrams*, *Topology* **37** (1998), 989–1009.
- [Tu] V. Turaev, *Knots and words*, International Mathematics Research Notices **2006** (2006), article ID 84098, 1–23.

Braid ordering and knot theory

伊藤 哲也 (東京大学数理科学研究科 修士一年)*

1 Introduction : Dehornoy 順序

群 G 上の全順序 $<$ で、 G の左作用に対して不変なもの、すなわち、 $\alpha < \beta$ が成り立つとき任意の G の元 γ に対して $\gamma\alpha < \gamma\beta$ が成り立つような全順序を群 G の左不変順序と呼ぶ。1990 年代、Dehornoy は Braid 群 B_n 上に左不変順序が存在すること、具体的には次のようにして定義される B_n 上の関係 $<$ が左不変順序となることを示した。

定義 1. Braid 群 B_n の元 α, β に対して、ある $i (1 \leq i \leq n-1)$ が存在し、 $\alpha^{-1}\beta$ が $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{i-1}^{\pm 1}, \sigma_i^{-1}$ を含まないが σ_i を含むような Word で書けるときの、 $\alpha < \beta$ であると定義する。

この左不変順序を以下、Dehornoy 順序と呼ぶ。その後の研究により、この Braid 群の左不変順序の存在は多くの別証および幾何的、代数的な解釈が与えられ ([DDRW])、Braid 群の自然な構造であることが判明した。Braid 群は、Artin により結び目を記述するものとして導入され、Jones 多項式などの多くの不変量が最初に Braid 群から構成されたなど、結び目を研究する際の重要な道具の一つである。従って、Braid 群の左不変順序というこの新しい代数的な構造から、結び目の情報を得ようとするのは、自然な発想に思われる。実際、[MN] により、Dehornoy 順序が閉ブレイドの変形操作の一種の制限となっていることが示されている。ここで、閉ブレイドの変形操作とは、閉ブレイドの表す結び目の型を変えないような閉ブレイドの変形のことである。

次に定量的に Dehornoy 順序を表す量として、Dehornoy floor と呼ばれる非負整数を定義する。

定義 2. Braid 群の元 $\beta \in B_n$ に対し $\beta \in (\Delta^{-2m-2}, \Delta^{2m+2})$ となるような最小の非負整数 m を β の Dehornoy floor と呼び、 $[\beta]_D$ と書く。ただし、 $\Delta = (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1)$ であり、 $(\Delta^{-2m-2}, \Delta^{2m+2}) = \{\alpha \in B_n \mid \Delta^{-2m-2} < \alpha < \Delta^{2m+2}\}$ 。

Dehornoy floor は、与えられた元が単位元からどれだけ離れているかを表す量であり、ブレイドの複雑さを Dehornoy 順序により表した数値といえる。今講演では、Braid 群の左不変順序とその Closure として得られる絡み目の幾何学的な性質との関係についての筆者の最近の研究の結果について述べる。

2 本質的曲面と Dehornoy 順序

三次元多様体の幾何構造や、位相的性質を調べる際には、その空間中の曲面を調べるというのがひとつの定石である。特に、結び目はその補空間により決定されるので、結び目を調べる際にはその補空間の位相、幾何について調べることが重要となる。Closed braid の軸 A をとり、 $S^3 \setminus A$ をソリッドトーラスとみなしてメリディアン円盤によるファイブレーション $\{H_\theta\}$ をひとつ固定する。このファイブレーションは一種の円柱座標のようなものとして捉えられる。Closed Braid の補空間内の本質的

* Email: tetitoh@ms.u-tokyo.ac.jp

(圧縮不可能、境界に平行でない)な種数 $g(\geq 1)$ の閉曲面とする。 F を各ファイバーと一般の位置におくことで、 F とファイブレーションの各ファイバー H_θ の交差は、 F 上に双曲型の特異点を持つ葉層構造を定める ([BF])。

この葉層構造の各葉が円となる時、 (F と軸 A が交点を持たないとき) F は Circular foliated であるという。 一般に、曲面の埋め込みの様子を記述するのは難しいが、Circular Foliated な曲面は、最も単純な形で埋め込まれている曲面であり、閉 braid の構造とうまく調和したものと見ることができる。

Dehornoy floor を用いて、その閉包の補空間の本質的曲面の位置に対して、次の結果を得た。

定理 1. $\hat{\beta}$ を閉ブレイド、 F を種数 g の $\hat{\beta}$ の補空間に埋め込まれた本質的閉曲面とする。 $[\beta]_D \geq 2g+1$ を満たすとき、 F は *circular foliated*。

定理 1 の証明には、Birman-Menasco による Braid foliation (上のようにして定めた F の葉層構造) の技法を用いる。この定理は、Braid 群の順序構造とその閉包の幾何との間に関係があることを示唆するものである。

3 Nielsen-Thurston 分類と結び目の幾何構造による分類

曲面 F の向きを保つ同相写像のイソトピー類のなす群を F の写像類群と呼び、 $MCG(F)$ で表す。Thurston は写像類群の元をその力学的な性質に基づいて、周期的、簡略可能、擬アノソフの三つの型に分類されることを示した。Braid 群は n 個の穴の開いた円盤 D_n の境界上では恒等写像となるような同相写像のイソトピー類のなす群と同一視できるので、自然な射影 $\pi : B_n \rightarrow MCG(D_n)$ が存在する。 $MCG(D_n)$ の分類を射影 π で引き戻すことにより、Braid 群上にもこの分類が適用できる。これを Braid 群の Nielsen-Thurston 分類と呼ぶ。

Thurston により、周期的写像の写像トラスはザイフェルトファイバー空間の構造が (従って双曲、Sol 以外の幾何構造が定まる) 簡略可能写像の写像トラスは本質的トラスを含む (従って幾何構造をもつ部分に分解可能) 擬アノソフ写像の写像トラスは双曲幾何構造が定まり、またこれらの逆も成り立つことが示されている。すなわち、写像類群の Nielsen-Thurston 分類と、その写像トラスの幾何構造との間には、一対一対応が存在する。

Thurston の有名なハーケン多様体の双曲化定理より、任意の結び目はその補空間の幾何構造に基づいて、トラス結び目、サテライト結び目、双曲結び目の三つの型に分類されることがわかる。従って、写像類群の分類とその写像トラスの幾何構造との関係のように、Braid 群とその Closure の補空間の幾何構造との間にも、なんらかの対応関係があることが期待できる。ところが、Braid 群の場合には、図 1 の例が示すように、一般に二つの分類は一対一に対応しない。従って、次の問いが自然に起こる。

Braid 群の Nielsen-Thurston 分類はいつその Closure の補空間の幾何構造を決定するか？

定理 1 の応用として、この問題に大してひとつの十分条件を与えることができる。

定理 2. β を閉包が結び目となるようなブレイドとする。 $[\beta]_D \geq 3$ を満たすとき、次が成り立つ。

1. β が周期的であることとその閉包 $\hat{\beta}$ がトラス結び目であることは同値である。
2. β が簡略可能であることとその閉包 $\hat{\beta}$ がサテライト結び目であることは同値である。
3. β が擬アノソフであることとその閉包 $\hat{\beta}$ が双曲結び目であることは同値である。

従って、 $[\beta]_D \geq 3$ であるとき Nielsen-Thurston 分類とその閉包の補空間の幾何構造は一対一に対応する。

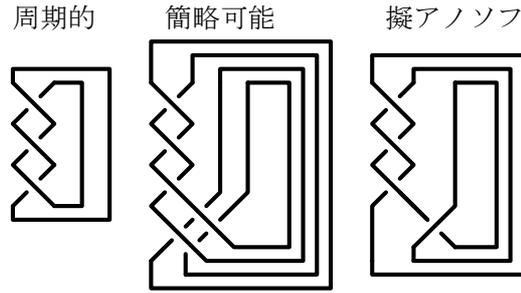


図 1: 閉包が (2,3)-トーラス結び目となるような周期的、簡略可能、擬アノソフブレイドの例

一般に、与えられた結び目に対してその幾何構造による分類を判定するのはそこまで容易ではない。とくに、双曲結び目は豊富に存在することが知られているが、具体的に双曲結び目であることが知られているものとしては、交点数が大きい結び目を除いては、交代結び目や、その仲間に属するものが中心である。この定理を用いると、Nielsen-Thurston 分類を用いて、非常に多くの双曲結び目を体系的に構成することができる。

系 1. $[f] \in MCG(D_n)$ を擬アノソフとする。 $P([f])$ を $P([f]) = \{\hat{\beta} \mid \beta \in \pi^{-1}([f]), [\beta]_D \geq 3\}$ と定めると、 $P([f])$ は無限個の異なる双曲結び目からなる集合となる。また、 $[g] \in MCG(D_n)$ を $[f]$ とは共役でない別の擬アノソフ元とすると、 $P([f])$ と $P([g])$ の共通集合は有限集合となる。

注意 1. 系 1 の方法により構成できない双曲結び目は無限に存在する。たとえば、8 の字結び目は上の方法では構成できないことを示せる。

特に、Braid の紐の本数が素数であるとき、状況は非常に簡明となる。

系 2. p を素数とする。 $\beta \in B_p$ に対して $[\beta]_D \geq 3$, β は非周期的、閉包が結び目となるときその閉包 $\hat{\beta}$ は双曲結び目である。

一般に、与えられたブレイドが周期的か否かは非常に簡単に判別できるため、この系の条件を満たすようなブレイドは簡単に構成できる。特に、Dehornoy Floor が 3 以上の素数本のブレイドの閉包はほとんどすべてが双曲結び目となることがわかる。

参考文献

- [BF] J.Birman , E.Finkelstein, *Studying surfaces via closed braids* Journal of Knot Theory and its Ramifications, **7**, No.3 (1998), 267-334.
- [DDRW] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen and B. Wiest, *WHY ARE THE BRAIDS ORDERABLE ?*, Panoramas et Synthèses **14**, Soc. Math. France. 2002.
- [MN] A.Malyutin, N.Netsvetaev, *Dehornoy's ordering on the braid group and braid moves*, St.Peterburg Math. J. **15**, No.3 (2004), 437-448.

Categorification について

荒金賢二 (大阪市立大学大学院博士一年)

1 Introduction

結び目に関連したホモロジー論や Categorification と呼ばれるものには幾つかの種類があり、例えば Khovanov-Rozansky による Matrix Factorization を用いるものや、Ozsváth-Szabó や Manolescu や Seidel、Thomas といった人たちによるモース理論を背景に持つもの、旗多様体の cotangent bundle の上で、接続層のなす導来圏を考えるものなどが挙げられる。これらはそれぞれ違った手法を使う理論ですが、お互いに独立したものではなくそれぞれが密接に関連したものであることが分かっています。ですが全てを説明することは不可能なので、この講演では Braid 群の表現を、旗多様体の構成可能層の導来圏に作ることを目指します。専門外の方にも雰囲気を感じて貰える様に、予備知識についても詳しく説明する予定です。この構成が自然なものであることを確認したうえで、時間が許すなら、同様の表現が cotangent-bundle の Lagrangian brane のなす A_∞ category の上にも構成され、それらが三次元多様体論とも深い関わりを持ったものであることを説明したいと思います。

2 ホモロジー代数

2.1 sheaf について

$Vect$ と書いて複素ベクトル空間のなすカテゴリーを表すとし、位相空間 X に対して $Top(X)$ で、オブジェクトを X 内の開集合とし、morphism は injection だけを考えます。 X 上の presheaf (前層) とは、 $Top(X)$ から $Vect$ への反変関手のことです。一般的に言われる sheaf (層) の定義は次のようなものです。

Definition 1. X 上の前層 F が、 X 上の層であるとは次の条件を満たすものである。

- U を開集合とし、その開被覆 V_i を考える。もしも $s \in F(U)$ が $s|_{V_i} = 0$ ならば $s = 0$
- $s_i \in F(V_i)$ が $s_i|_{(V_i \cap V_j)} = s_j|_{(V_i \cap V_j)}$ を満たす時に、 $s \in F(U)$ で $s|_{(V_i)}$ を満たすものが取れる。

定義を見れば、層と前層の概念の間には局所性の条件の隔たりがあるのですが、sheafification(層化)という操作をすることによって、前層に対して層を対応させることが可能になります。 $F(U)$ の元のことを U 上の F の section と呼びます。

Definition 2. F と G を X 上の層だとします。この時に層 F と G の間の写像 $\Phi : F \rightarrow G$ を、全ての X の開集合 U に対して定められる写像 $\Phi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ で、もしも $V \subseteq U$ を満たすならば下の図式が可換であるようなものとします。

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\Phi(U)} & G(U) \\ \text{restriction} \downarrow & & \downarrow \text{restriction} \\ F(V) & \xrightarrow{\Phi(V)} & G(V) \end{array}$$

こうして層とその間の射を考えることで、層のカテゴリーを考えることが出来るようになります。 $Sh(X)$ を、オブジェクトが X 上の層で、*morphism* は層の射とします。

ベクトル空間の時と同様にして、層の間の射に対しても kernel、cokernel、image を考えることが出来ます。

Definition 3. $\Phi : F \rightarrow G$ が層の間の写像であるとき Φ の *kernel* とは

$$\ker \Phi(U) = \ker \{ \Phi(U) : F(U) \longrightarrow G(U) \}$$

で定められる層のことである。

Φ の *image* とは

$$\text{im} \Phi(U) = \text{im} \{ \Phi(U) : F(U) \longrightarrow G(U) \}$$

で定められる前層を層化して得られるものとする。

次に底空間の間の写像と層のカテゴリ-上の関手について説明します。

$$f: X \rightarrow Y$$

を連続写像とした時に、これが誘導する関手について考えます。 F を X 上の層としたときに、 f による pushforward f_*F を Y を Y の開集合として、 $f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$ とします。

G を Y 上の層としたときに、 f による pullback $f^{-1}G$ を X を X の開集合として、 $\text{colim}_{V \supset f(U)} G(V)$ と定義します。

$s \in F(U)$ を F の U 上の section とした時に s の support $|s|$ を U の部分集合

$$\{x \in U \mid s_x \neq 0\}$$

の閉包として定義し、 f による pushforward with proper support を

$$f_! : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y) \quad f_!F(V) = \{s \in F(f^{-1}(V)) \mid f: |s| \rightarrow Y \text{ is a proper map}\}$$

として定義します。

2.2 Čech cohomology

F を X 上の層とした時に、層係数のコホモロジーを定義する。 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とした時に、任意の $p \geq 0$ に対して $I^{(p)}$ で、 I の部分集合で $p + 1$ 個の要素からなるもの全体を表すとする。また $I^{(p)}$ の元に対する orientation を、 ordering を偶置換で割ったものとして定める。 $K = \{i_0, \dots, i_p\} \in I^{(p)}$ とした時に $U_K = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ と記すことにし、

$$C^p(\mathcal{U}; F) = \prod_{K \in I^{(p)}} F(U_K)$$

とする。 $C^p(\mathcal{U}; F)$ を p 次の cochain とし、その coboundary

$$d: C^p(\mathcal{U}; F) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}; F)$$

を

$$(d\alpha)_K = \sum_{j=0}^{p+1} \pm \alpha_{K - \{i_j\}}|_{U_K} \quad K = \{i_0, \dots, i_p\} \in I^{(p+1)}$$

と定めることにする。± は K の orientation と $K - \{i_j\}$ に i_j を最初に置いたものの orientation が一致するかどうかで定める。この cochain の cohomology を

$$\check{H}^p(\mathcal{U}; F) = \frac{\ker d^p}{\text{im } d^{p-1}}$$

として表すことにする。この cohomology は開被覆の取り方に依存しているが、 \mathcal{V} を \mathcal{U} の細分とした時に、層の制限写から自然な写像

$$C^p(\mathcal{U}; F) \rightarrow C^p(\mathcal{V}; F)$$

が誘導され、それらの colimit を考えることで開被覆に依らない cochain を定義することが出来る。それらを $C^p(X; F)$ として表す。Čech cohomology とは、この cochain の cohomology である。p-th Čech cohomology は

$$H^p(X; F) = \frac{\ker d^p : C^p(X; F) \rightarrow C^{p+1}(X; F)}{\text{im } d^{p-1} : C^p(X; F) \rightarrow C^{p+1}(X; F)}$$

として表される。 X が三角形分割可能ならば、定数層の Čech cohomology と単体複体のコホモロジーは同型になることが知られている。このようにして一つ層が与えられると、それに対してコホモロジーを考えることが出来るが、それだけでなく層の complex に対して一般化することが出来る。

Definition 4. 層の列

$$\dots \longrightarrow F^i \xrightarrow{\delta^i} F^{i+1} \longrightarrow \dots$$

$i \in \mathbb{Z}$ で $\delta^{i+1}\delta^i = 0$ を満たすものを層の complex と呼び、 F^* として表す。 $\{C^p(X; F^q), \delta, d\}$ は重複体をなすのでそれらの total cohomology を Čech hypercohomology と呼ぶ。

2.3 導来圏と導来関手

まず injective resolution について説明します。これは層の cohomology を扱うときに理論的には非常に重要です。

Definition 5. 位相空間 X 上の層 F が injective であるとは、 $Sh(X)$ から $Vect$ への変関手 $Hom_{Sh(X)}(-, F)$ が完全な時に言う。

この定義の上で重要なことは次が成り立つことです。

Proposition 1. F が X 上の層であるとすると、層の完全列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^0(F) \longrightarrow I^1(F) \longrightarrow \dots$$

で全ての $I^j(F)$ が *injective* になるようなものが存在する。

具体的な構成は Godement resolution として呼ばれています。またこれは層に対しての injective resolution ですが、層の complex に対しては injective sheaf からなる complex で、もとの complex に quasi-isomorphic なものとして定義すること出来ます。

次に導来圏と導来関手について説明します。これらの大雑把なアイデアは層の complex とその resolution をまとめて扱おうということです。

Definition 6. 位相空間 X の上の層がなす導来圏 $D(X)$ とは、object が有界な層の complex で、 F^* から G^* への morphism が次の diagram の同値類で定義される category のことである。

$$F^* \xleftarrow{\psi^*} E^* \xrightarrow{\phi^*} G^*$$

この図式で ψ^* と ϕ^* は *cochain-map* で ψ^* は *quasi-isomorphism* とする。

二つの図式 $F^* \xleftarrow{\psi^*} E_i^* \xrightarrow{\phi^*} G^*$ $i = 1, 2$ が同値とは次のような可換図式が存在することとする。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E_1^* & & \\
 & \psi_1^* \swarrow & \uparrow & \searrow \phi_1^* & \\
 F^* & \xleftarrow{\psi_3^*} & E_3^* & \xrightarrow{\phi_3^*} & G^* \\
 & \psi_2^* \swarrow & \downarrow & \searrow \phi_2^* & \\
 & & E_2^* & &
 \end{array}$$

この図式において ψ_i はすべて *quasi-isomorphism* であるとする。

層の導来圏の上では、quasi-isomorphism に inverse が存在します。これによって chain complex をより扱いやすくなる利点があります。

次に導来関手について復習しておきます。

$F : Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$ を左完全な関手とします。このとき、この関手が誘

導する、導来圏上の関手で良い性質を持つものを考えるというのが導来関手の考えです。この節の最初に定義した injective resolution が大切になってきます。injective resolution は関手性をもっています。この関手を I としましょう。

$$I : D^b(X) \longrightarrow D^b(X)$$

Definition 7. 左完全な関手 $F : Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$ に対する右導来関手 $RF : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ とは injective resolution の関手 I と F の合成のことである。

3 Constructible sheaf

ここから考える多様体はすべて実解析的なものとし、多様体間の射についても同様とします。(代数多様体や Pseudo-manifold と呼ばれるものにも拡張できますが、ここでは深く考えないことにします。) 構成可能層のなす導来圏の理論で最も重要だと思われるのは Fourier 変換論です。これらの用語と概念について説明していきます。

構成可能層は Whitney stratification された空間で考える層の理論です。大雑把にいて stratification(階層化) とは、単体複体への分割に相当するものです。実際、Whitney stratification を持つ多くの空間に対してそれと両立する三角化が可能です。

Definition 8. 0 -次元の階層化された多様体とは、離散位相を入れた点集合のことであるとします。 $\dim(X) > 0$ とした時に、階層化された空間とは $X = X_m \supset X_{m-1} \supset \dots \supset X_0$ という部分多様体による filtration で、 $x \in X_j - X_{j-1}$ に対して或る X の近傍 N_x が存在して、次の条件を満たす時にいう。

・ある $(m - j - 1)$ 次元の階層化された空間 $L = L_{m-j-1} \supset \dots \supset L_0$ と homeomorphism

$$\phi : N_x \rightarrow \mathbb{R}^j \times C(L)$$

(ここで $C(L)$ は open cone とします。) で局所的に

$$\psi : N_x \cap X_{j+i+1} \simeq \mathbb{R}^j \times C(L_i) \quad (m - j - 1 \geq i \geq 0)$$

さらに $N_x \cap X_j$ が $\mathbb{R}^j \times \text{vertex of } C(L)$ と homeo になる。

$X_j - X_{j-1}$ は定義から多様体になり、連結成分を strata とよびます。Whitney stratification とは stratification の中でも tangent の構造がよく分かるようなものです。重要な概念ですが、細かい条件について述べても後で殆ど使わないので割愛します。

Definition 9. X 上の層 F が構成可能層とは、或る stratification $X = X_m \supset \cdots \supset X_0$ に対して、制限した層 $F|_{X_{m-k} - X_{m-k-1}}$ が有限次元の stalk を持つ局所定数層になっていることとする。

これから考えるのは多様体 X の上の構成可能層がなす導来圏についてです。まず幾つかの命題を述べます。

Proposition 2. 次のような可換図 (A はファイバー積とします) を考えます。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \psi \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

このときに導来圏で $g^* f_! \simeq \psi_! \phi^*$ が成り立っている。

Definition 10. X と Y を二つの多様体とし $U \subset X \times Y$ という部分多様体と projection のなす図式を考えます。

$$Y \xleftarrow{p_2} U \xrightarrow{p_1} X$$

このときに $K \in \text{Ob}(D(U))$ を核とする Fourier-Sato transform を $\Phi_K = p_{2!}(K \otimes p_1^{-1} -) : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ と定義する。

上の定義が構成可能層における Fourier 変換ですが、同様の変換が連接層の場合にもあります。圏同値を与える多くの関手が、この形でかけることが示されています。

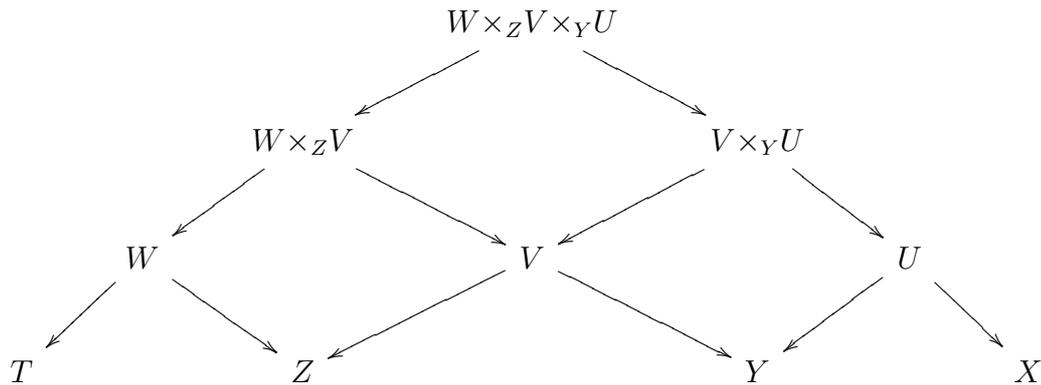
Theorem 1. 上と同じ設定で $Y \times Z$ の部分多様体を V とした時に、下のような図式を考えます。

$$\begin{array}{ccccc} & & V \times_Y U & & \\ & \swarrow \beta & & \searrow \alpha & \\ & V & & U & \\ p_4 \swarrow & & & & \searrow p_1 \\ Z & & & & X \\ & \searrow p_3 & & \swarrow p_2 & \\ & Y & & & \end{array}$$

このときに $L \in D(V)$ 、 $K \in D(U)$ に対して $L \boxtimes K := \beta^*L \otimes \alpha^*K$ とします。すると関手の間に

$$C_{L,K} : \Phi_L \Phi_K \simeq \Phi_{L \boxtimes K}$$

という同型が存在する。この同型によって W を $T \times Z$ の部分多様体として $M \in D(W)$ とすると下の図式を用いて



自然な等式 $C_{M \boxtimes L, K}(C_{M, L} \Phi_K) = C_{M, L \boxtimes K}(\Phi_M C_{L, K})$ が成立する。すなわち下の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi_M \Phi_L \Phi_K & \longrightarrow & \Phi_{M \boxtimes L} \Phi_K \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Phi_M \Phi_{L \boxtimes K} & \longrightarrow & \Phi_{M \boxtimes L \boxtimes K}
 \end{array}$$

3.1 旗多様体と表現論

幾つかの定義を思い出しましょう。

G をコンパクトリー群とし、その中に含まれる連結可換閉部分群の中で包含関係において極大なものを極大トーラスと呼び T で表すとします。 $B = G/T$ が旗多様体と呼ばれる等質空間でした。極大トーラス T に対する正規化群

$$N_G(T) := \{g \in G \mid gtg^{-1} \in T \text{ for all } t \in T\}$$

を中心化群 $Z_G(T)$ (この場合 T 自身と一致することが知られています。) を考えます。このとき $W := N_G(T)/Z_G(T)$ が G のワイル群と呼ばれるも

のでした。ワイル群に対して Braid 群 B_W を W で生成され Yang-Baxter relation を満たすものとします。元の長さ関数は l として書くことにします。

$\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ に対する G の対角作用を考えると以下のように軌道分解できることが知られています。

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B} = \coprod_{w \in W} \mathcal{O}(w)$$

次のような第一成分と第二成分への射影を考え

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}(w) & \\ p_w \swarrow & & \searrow q_w \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B} \end{array}$$

Fourier-Sato 変換を $F_w = (p_w)_!(q_w)^* : D(\mathcal{B}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ とおく。射影とファイバー積の定義から $l(v) + l(w) = l(vw)$ のときに

$$\mathcal{O}(v) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{O}(w) \simeq \mathcal{O}(vw)$$

と同一視することが出来る。この同型が $F_v F_w \simeq F_{vw}$ を誘導する。

Theorem 2. $b = t_1 \cdots t_n \in B_W$ としたときに

$$\check{F}_b := \lim_{(t_1, \dots, t_n) F_{t_1} \cdots F_{t_n}}$$

とにおいて $D(\mathcal{B})$ の *self-equivalence* を定める。これらは実際に Braid 群 B_W の作用になっている。

ON A LOCAL MOVE FOR VIRTUAL KNOTS AND LINKS

及川 寿幸
東京女子大学大学院理学研究科

1. Introduction

R^2 上にはめ込まれたいくつかの閉曲線で各交点が real crossing 又は virtual crossing になっているものを *virtual knot (link) diagram* という.

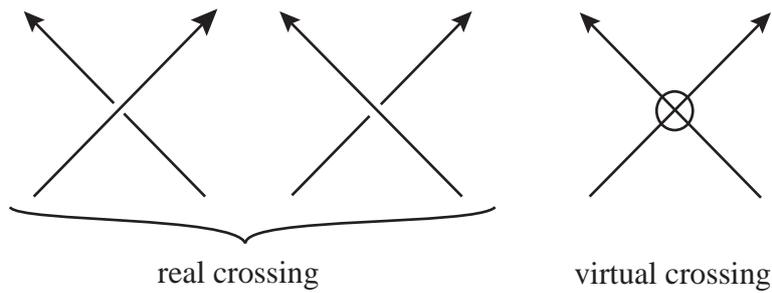


FIGURE 1

2つの virtual knot (link) diagram が, generalized Reidemeister move (Fig.2) を有限回使うことにより, 一方が他方から得られるとき, それらは同値であるといい, virtual knot (link) diagram のこの同値関係による同値類を, *virtual knot (link)* と呼ぶ.

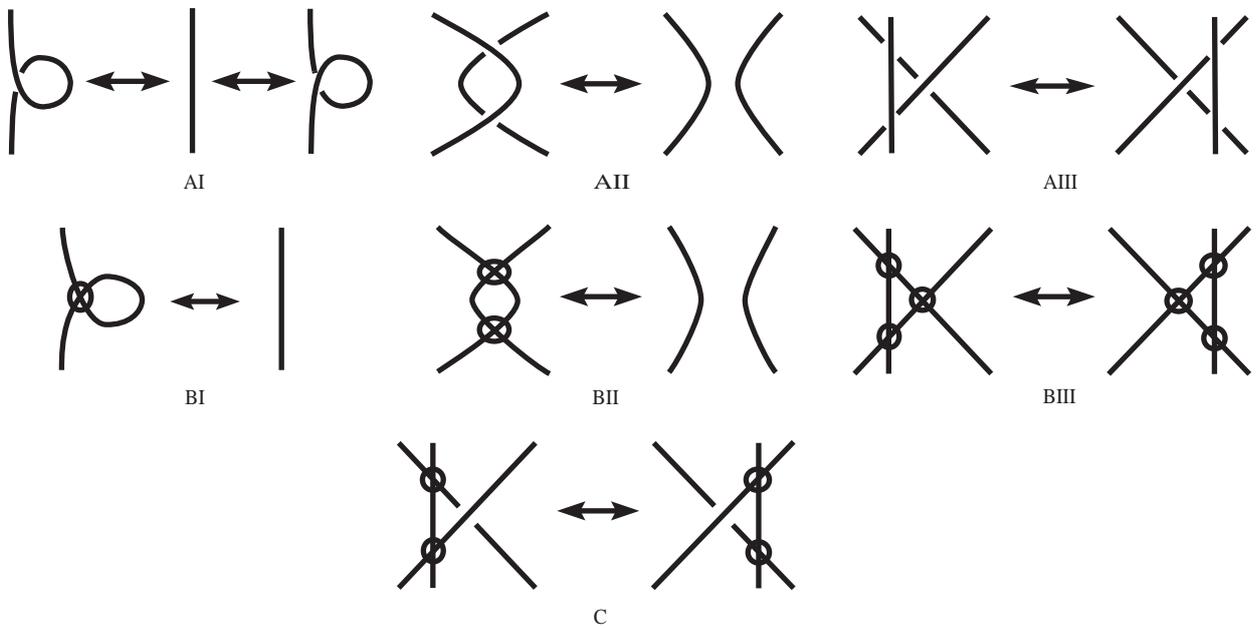


FIGURE 2

virtual knot theory においては, forbidden move (Fig.3) と呼ばれる local move があるが, 金信氏と Nelson によって次の定理が独立に示されている.

Theorem 1.1([1][2]). 任意の virtual knot は, generalized Reidemeister move と forbidden move を用いて, trivial knot に変形できる.

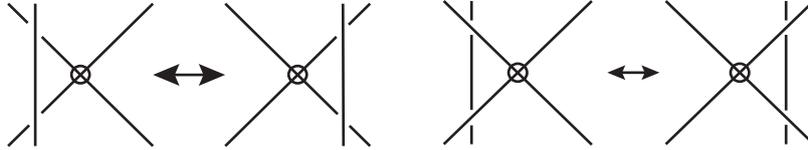


FIGURE 3

また, forbidden move による 2-component virtual link の分類がすでになされている ([4]).

本稿では, CF-move という virtual knot (link) diagram 上の local move を定義し, virtual knot と 2-component virtual link の分類を行った.

2. Preliminaries

Definition 2.1(virtual linking number) [4]. $L = K_1 \cup K_2$ を 2-component virtual link diagram とし, $V = \{v | v : K_1 \text{ と } K_2 \text{ の間の virtual crossing}\}$ とする. v の (1, 2)-sign を $\text{sgn}_{1,2}(v)$ で表し, Fig.4 のように定義する.



FIGURE 4

このとき、

$$\text{vlk}(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \text{sgn}_{1,2}(v)$$

を K_1 と K_2 の virtual linking number という.

Example.

Fig.5 の virtual linking number を計算すると, $\text{vlk}(K_1, K_2) = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$.

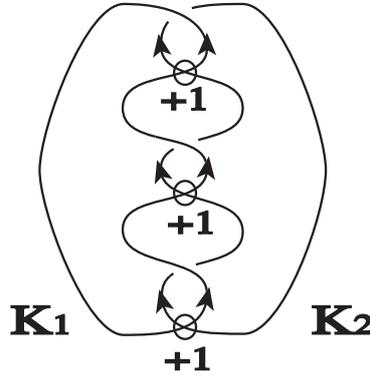


FIGURE 5

Definition 2.2. $L = K_1 \cup K_2$ を virtual linking number が整数であるような oriented 2-component virtual link とする. また, c, c_0 を K_1 と K_2 の間の任意の real crossing とする. $d_{K_1}(c, c_0)$ は K_1 上の c_0 から orientation に沿って c までいくときに通過した virtual crossing の数とし, $d_{K_2}(c, c_0)$ は K_2 上の c_0 から orientation に沿って c までいくときに通過した virtual crossing の数とする. $d(c, c_0) \equiv d_{K_1}(c, c_0) + d_{K_2}(c, c_0) \pmod{2}$ とおく. $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ を K_1 と K_2 の間の real crossing の集合としたとき,

$$n(L) = \left| \sum_{i=0}^m (-1)^{d(c_i, c_0)} \text{sgn}(c_i) \right|$$

と定義する.

Example.

Fig.6 の virtual link について $n(L)$ を計算すると,
 $n(L) = |(-1)^{d(c_0, c_0)} \times (+1) + (-1)^{d(c_1, c_0)} \times (+1)|$
 $= |1 + 1| = 2.$

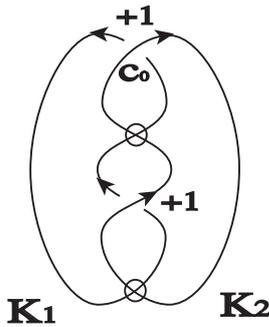


FIGURE 6

$n(L)$ について以下の結果が得られる.

Proposition 2.3. $L = K_1 \cup K_2$ を $\text{vlk}(K_1, K_2)$ が整数であるような oriented 2-component virtual link とする. このとき, generalized Reidemeister move と 3 で定義する CF-move を行っても, $n(L)$ の値は変わらない.

3. CF-move

Fig.7 のような virtual knot (link) diagram 上の local move を CF-move と呼ぶ.

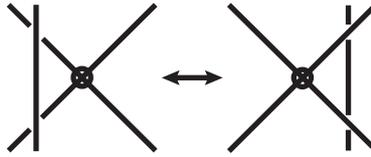


FIGURE 7

virtual knot に関して, 次の結果が得られた.

Theorem 3.1. 任意の virtual knot は, generalized Reidemeister move と CF-move を用いて, trivial knot に変形できる.

2-component virtual link に関して, 次の結果が得られた.

Theorem 3.2. $L = K_1 \cup K_2$ を oriented 2-component virtual link とする. K_1 と K_2 の virtual linking number を μ とおく. L は generalized Reidemeister move と CF-move を用いて, 以下のような 2-braid virtual link のいずれかに移すことができる.

- (1) μ が半整数のとき

$L(2\mu; 0; 0; 0; 0; 0)$	if $\mu > 0;$
$L(0; -2\mu; 0; 0; 0; 0)$	if $\mu < 0.$
- (2) μ が整数のとき

$L(\frac{2\mu+n(L)}{2}; 0; \frac{2\mu-n(L)}{2}; 0; 0; 0)$	if $0 \leq n(L) < 2\mu;$
$L(0; \frac{-2\mu+n(L)}{2}; 0; \frac{-2\mu-n(L)}{2}; 0; 0)$	if $0 \leq n(L) < -2\mu;$
$L(\frac{2\mu+n(L)}{2}; \frac{-2\mu+n(L)}{2}; 0; 0; 0; 0)$	if $0 \leq 2\mu \leq n(L).$

Fig.8は、2-braid virtual linkを表し、 P_k には、oriented virtual Hopf tangle $H_r (1 \leq r \leq 6)$ が、1つずつ入る (Fig.9). Fig.8を上から、 $L(H_1, \dots, H_1, H_2, \dots, H_2, \dots, H_6, \dots, H_6)$ と並び換えた2-braid virtual linkを $L(m_1; m_2; m_3; m_4; m_5; m_6)$ で表す. 但し、 m_r は H_r の個数を示す.

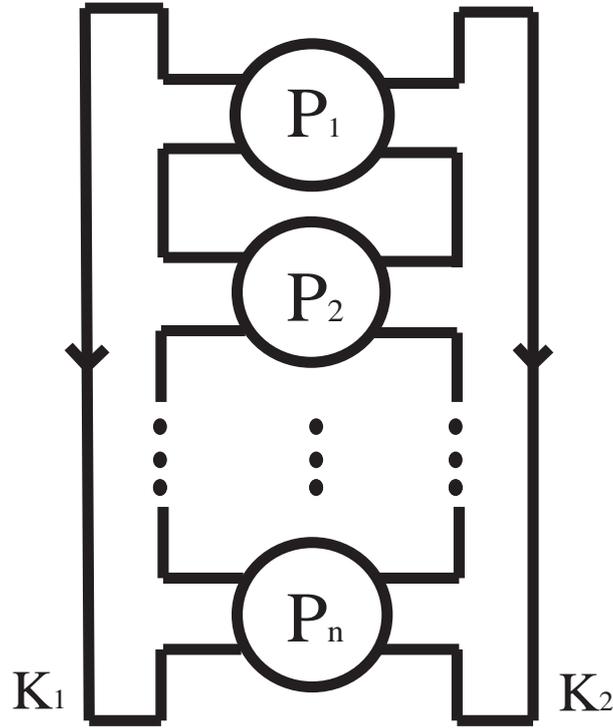


FIGURE 8

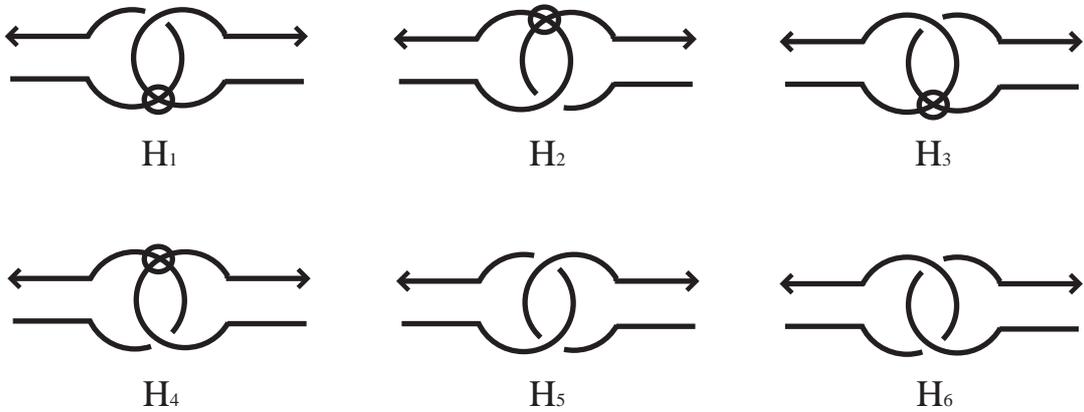


FIGURE 9

Proposition 2.3 と Theorem 3.2 から次の定理が得られる.

Theorem 3.3. $L = K_1 \cup K_2$, $L' = K_1' \cup K_2'$ を 2-component virtual link とする. L が L' から, generalized Reidemeister move と CF-move を用いて得られるための必要十分条件は, virtual linking number $\text{vlk}(K_1, K_2)$ が半整数のとき, $\text{vlk}(K_1, K_2) = \text{vlk}(K_1', K_2')$, $\text{vlk}(K_1, K_2)$ が整数のとき, $\text{vlk}(K_1, K_2) = \text{vlk}(K_1', K_2')$ かつ $n(L) = n(L')$ である.

4. Proof of Theorem 3.1

Theorem 1.1 の金信氏の証明方針に沿って Theorem 3.1 を証明する. 次の Lemma 4.1 を準備する.

Lemma 4.1. link の任意の self real crossing は, generalized Reidemeister move と CF-move を用いて, virtual crossing に変形できる. 特に, knot の任意の real crossing は, generalized Reidemeister move と CF-move を用いて, virtual crossing に変形できる.

Proof. s_1, s_2, s_3 -move を Fig.10 のような move とする.

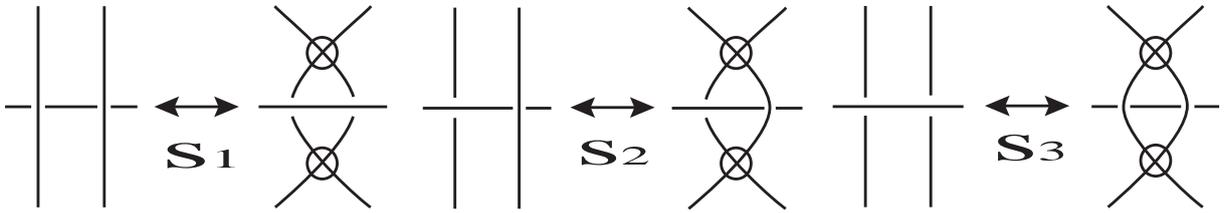


FIGURE 10

s_1, s_2, s_3 -move はそれぞれ, generalized Reidemeister move と CF-move を用いて, 生成することができる. これらの move を用いて, Fig.11 より Lemma を証明する. Fig.11 では, generalized Reidemeister move, CF-move をそれぞれ, GRM, CF と略す.

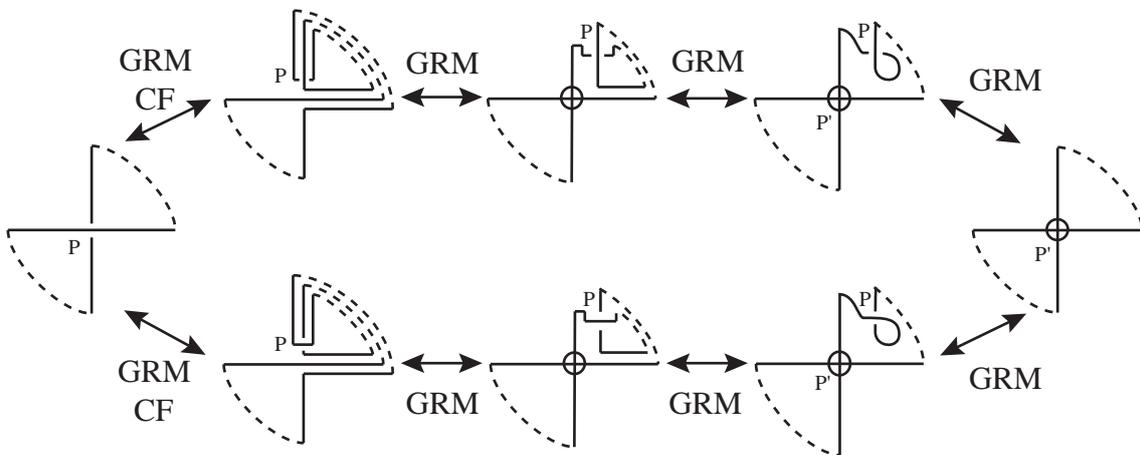


FIGURE 11

1番目から2番目への変形は、右上の点線部分における real crossing の数が偶数または奇数によって、2通りに分かれる。self real crossing である点Pを出発点とし、Fig.11のように、出発地点までスライドさせる。このとき、real crossing を通過するたびに、 s_1, s_2, s_3 -move を用いる。通過した real crossing の上下は逆になる。2番目から4番目は、BI, BII, BIII, C-move を用いる。4番目から5番目は、AI-move を用いる。詳しくは [3] を参照のこと。

Lemma 4.1 より、virtual knot の self real crossing を全て virtual crossing にし、generalized Reidemeister move を用いて、trivial knot に変形できる。

5. Proof of Theorem 3.2

初めに、Lemma 4.1 より L の self real crossing を全て virtual crossing に変形し、得られた link を L' とする。次に、 K_1 と K_2 の間の real crossing を全て Fig.12 のように BII を用いて変形する。[4] の Theorem 6 と同じ方法より、generalized Reidemeister move を用いて、 L' から Fig.13 のような L'' に変形することができる。 P_1, \dots, P_n には virtual Hopf tangle $H_r (1 \leq r \leq 4)$ が1つずつ入る。 T_1 には K_1 だけの arc, T_2 には K_2 だけの arc が含まれている。 T_1, T_2 内の crossing は全て virtual crossing になっている。 Fig.13 から、Lemma 5.1 で示されている band の足の入れ換えを用いて L'' から 2-braid virtual link に変形することができる。

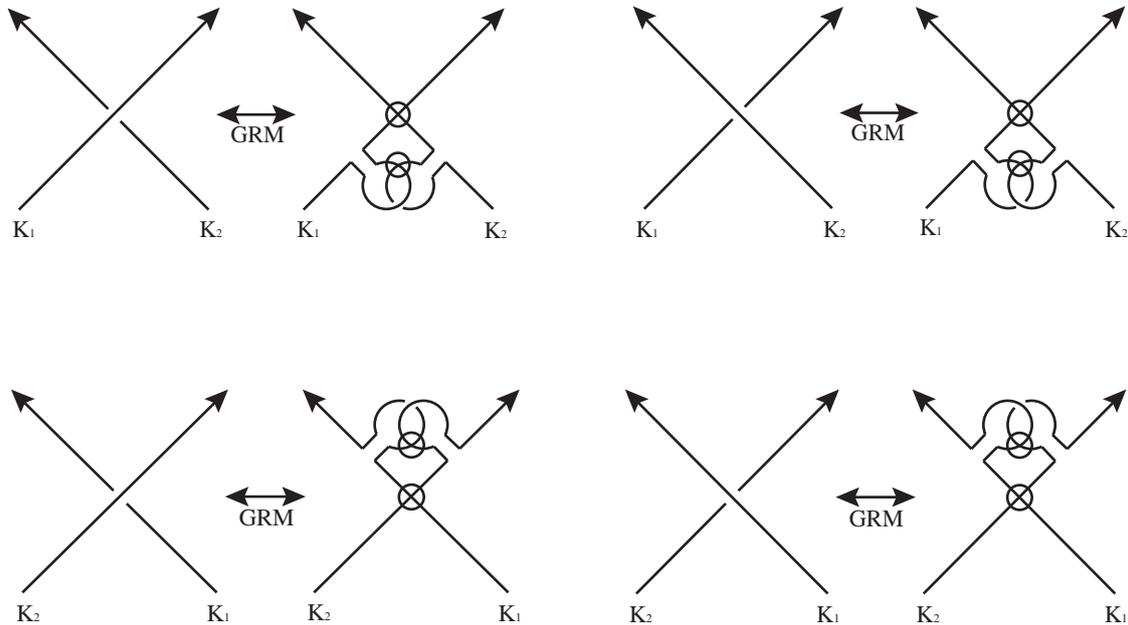


FIGURE 12

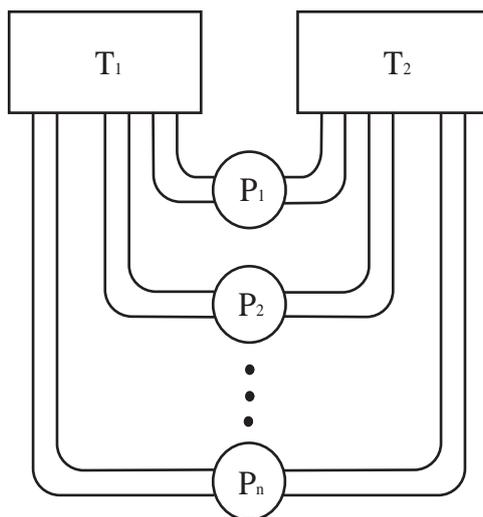


FIGURE 13

Lemma 5.1. 全ての band の足は generalized Reidemeister move と CF-move を用いて入れ換えることができる. そのとき, virtual Hopf tangle の種類が変わる.

Proof. この Lemma は Fig.14-18 で示す. (6) は (1), (8) は (3) と同じ方法で足の入れ換えができる.

band の足の入れ換えによって virtual Hopf tangle の real crossing の上下は変わる.

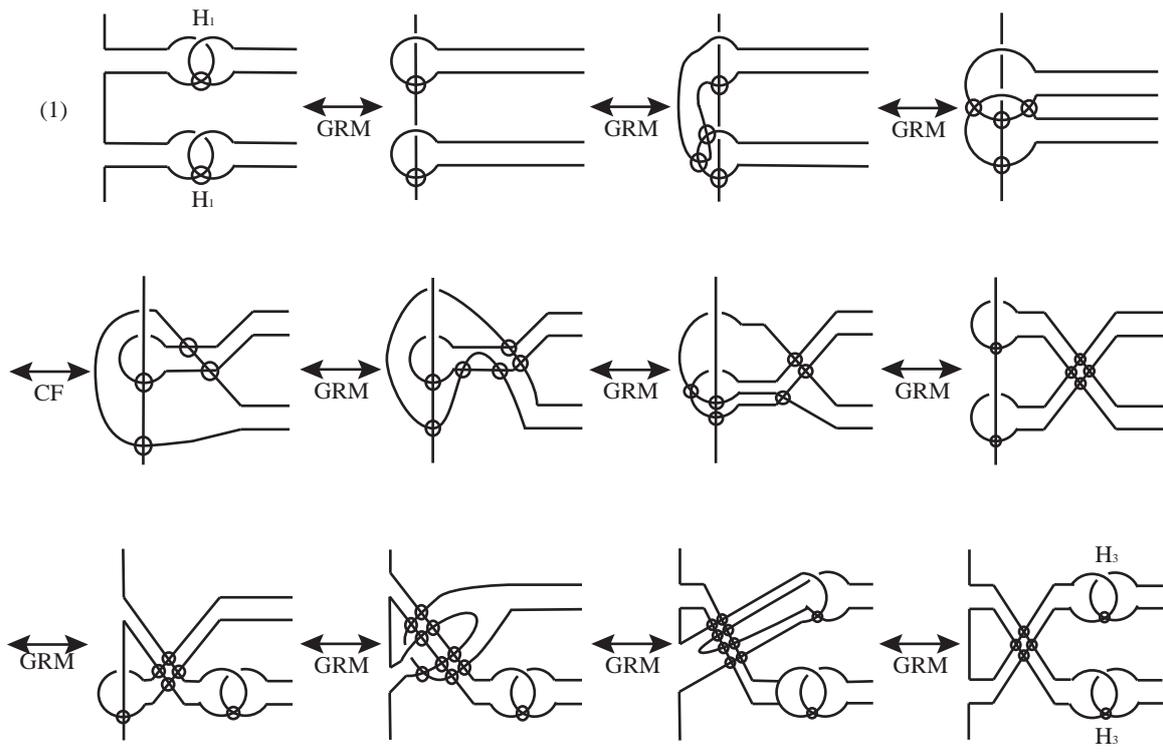


FIGURE 14

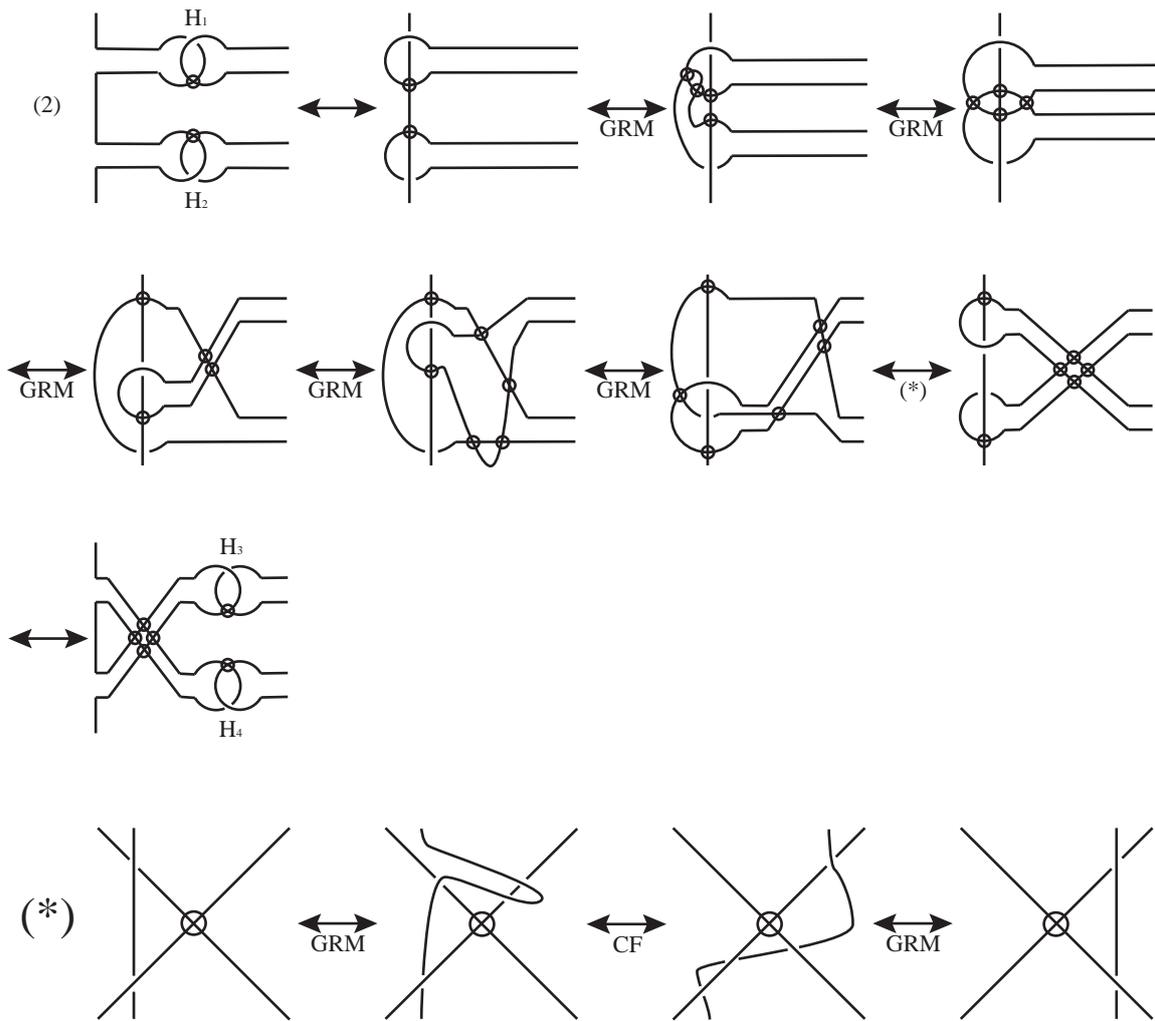


FIGURE 15

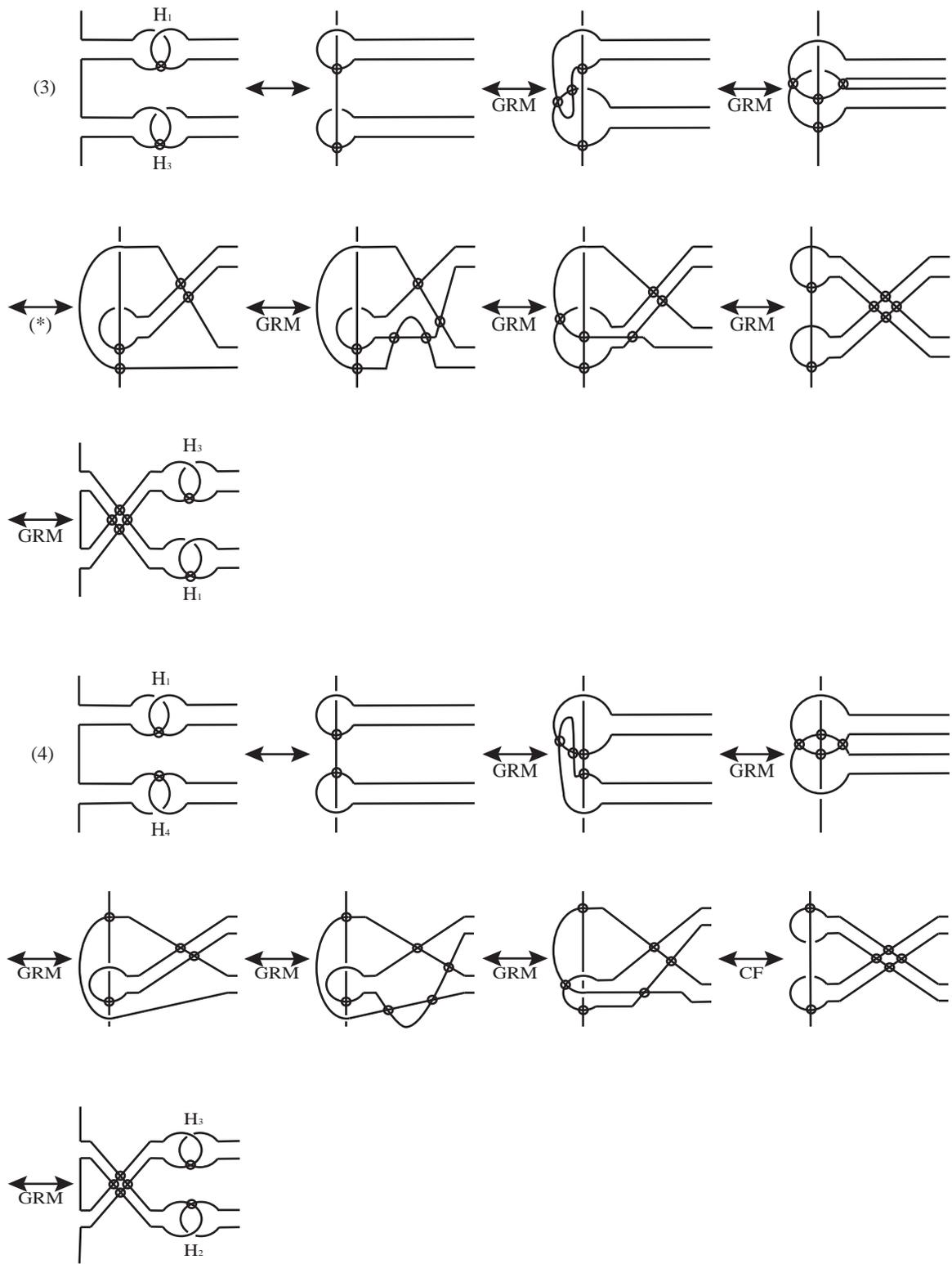


FIGURE 16

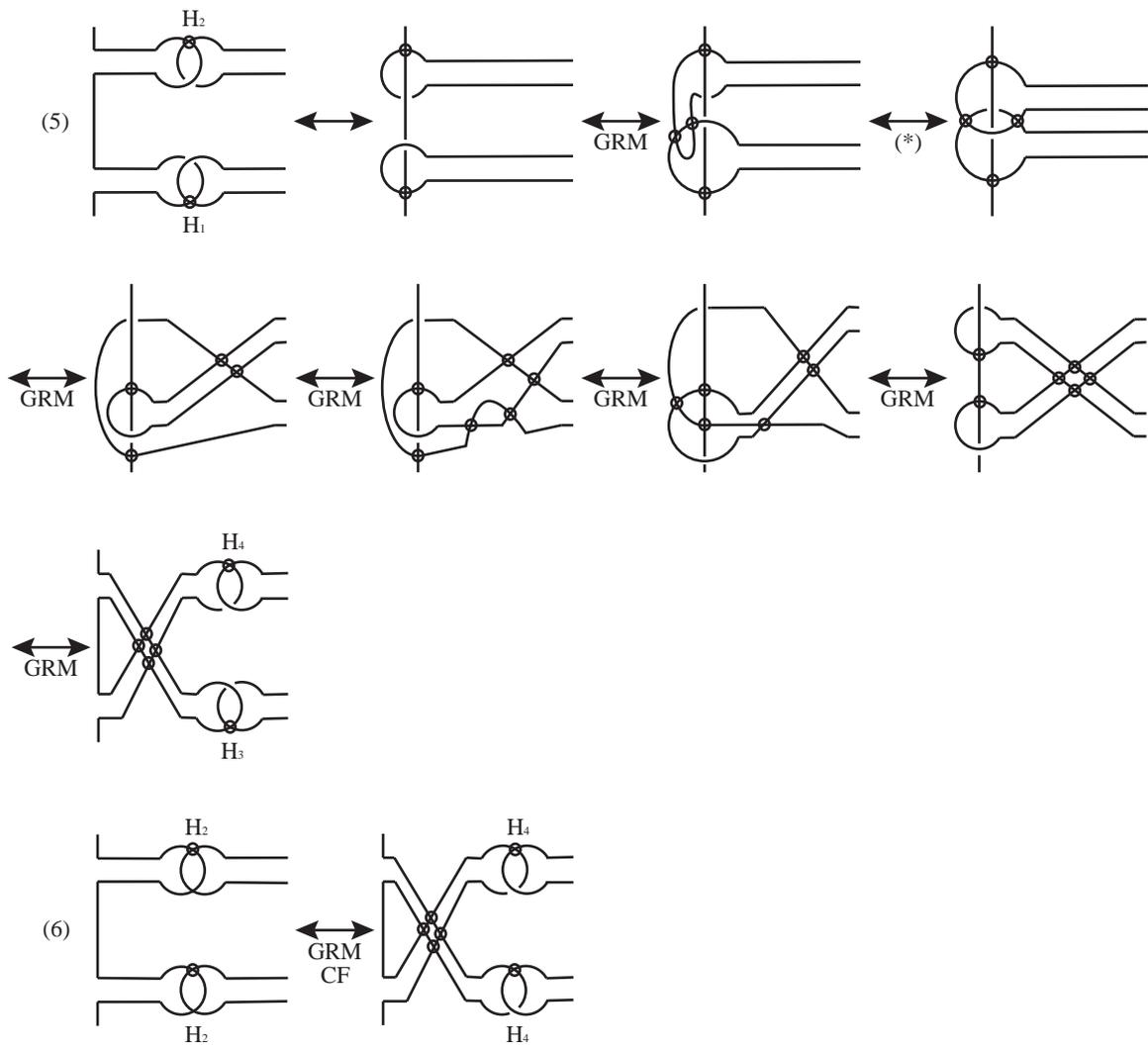


FIGURE 17

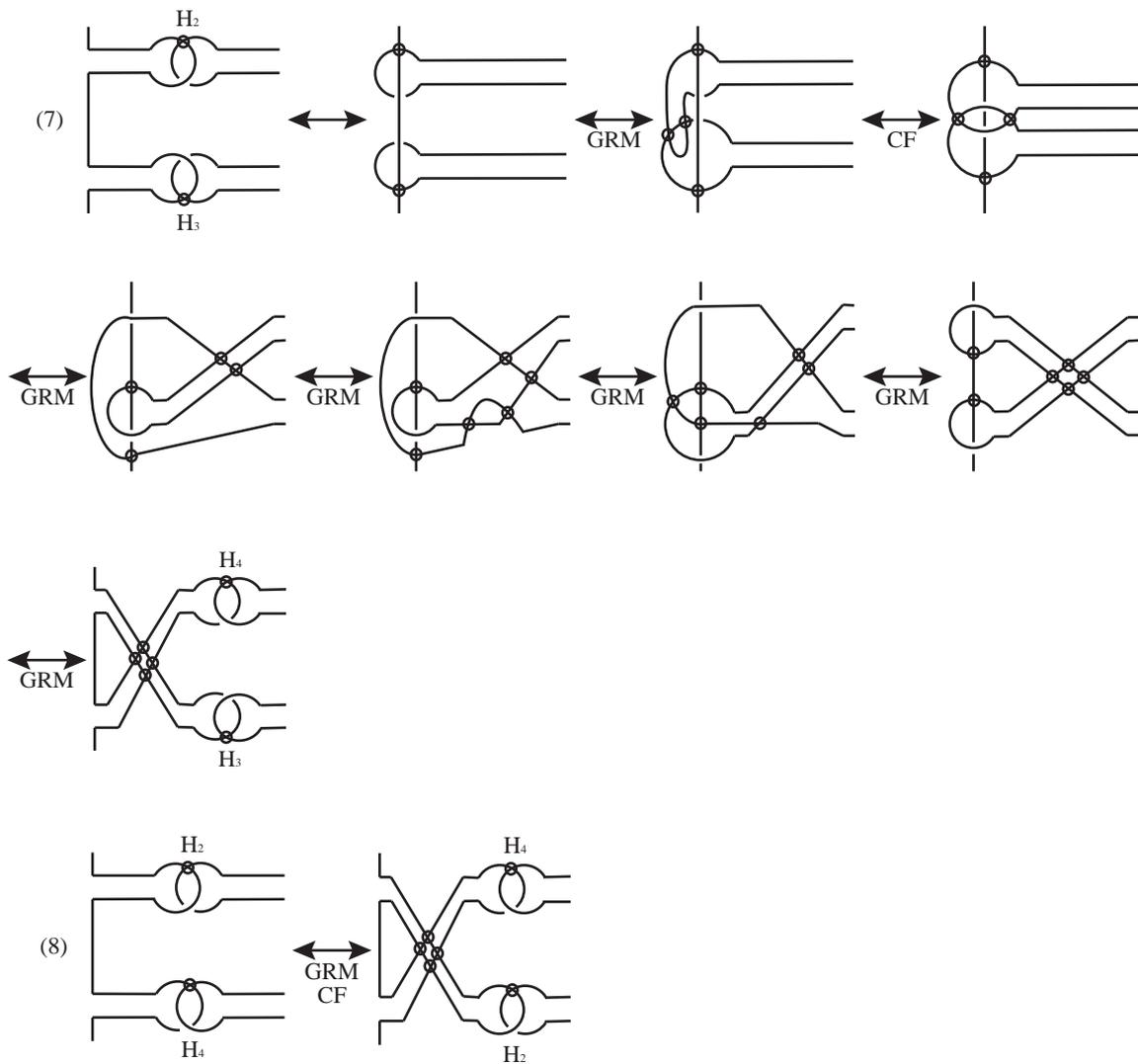


FIGURE 18

Lemma 5.2. 平行な band の入れ換えは generalized Reidemeister move と CF-move により, 可能である. 即ち, 2-braid virtual link において, virtual Hopf tangle の入れ換えが可能である.

s_4 -, s_5 -move を Fig.19 のような move とする. s_4 -move 内の点線部分には real crossing が偶数個, s_5 -move 内の点線部分には real crossing が奇数個ある.

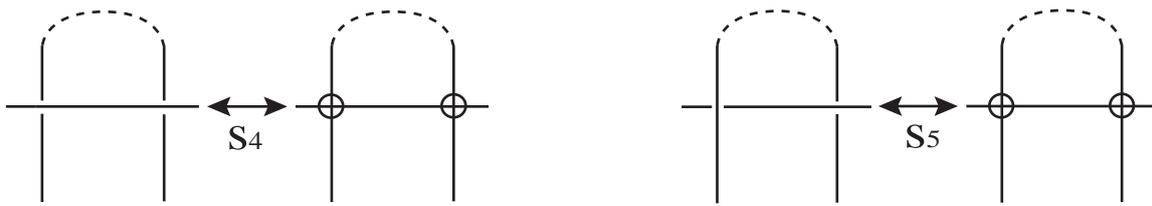


FIGURE 19

Fig.20 より s_4 -, s_5 -move は, generalized Reidemeister move と CF-move を用いて, 生成される.

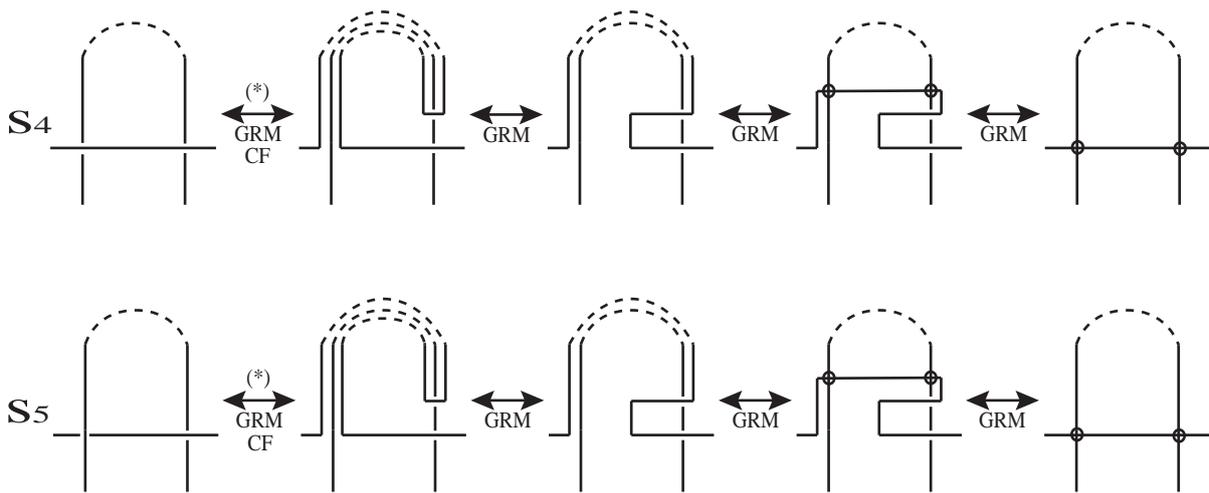


FIGURE 20

(*) の変形は, Lemma 4.1 と同じ方法で行う. そのとき, 点線部分の real crossing の上下は逆になる. Fig.21 で, 平行な band の入れ換えが s_4 -, s_5 -move, generalized Reidemeister move, CF-move を用いてできることを示す. (1) は H_1 と H_3 の入れ換えを示し, 上下を入れ換えると H_2 と H_4 の入れ換えを示したことになる. (2) は, H_1 と H_2 の入れ換えを示し, (3) は, H_3 と H_4 の入れ換えを示す.

H_1 と H_4 が並んでいるときは, ほどけて消える. H_2 と H_3 も同様. こうして, Lemma 5.2 は示される.

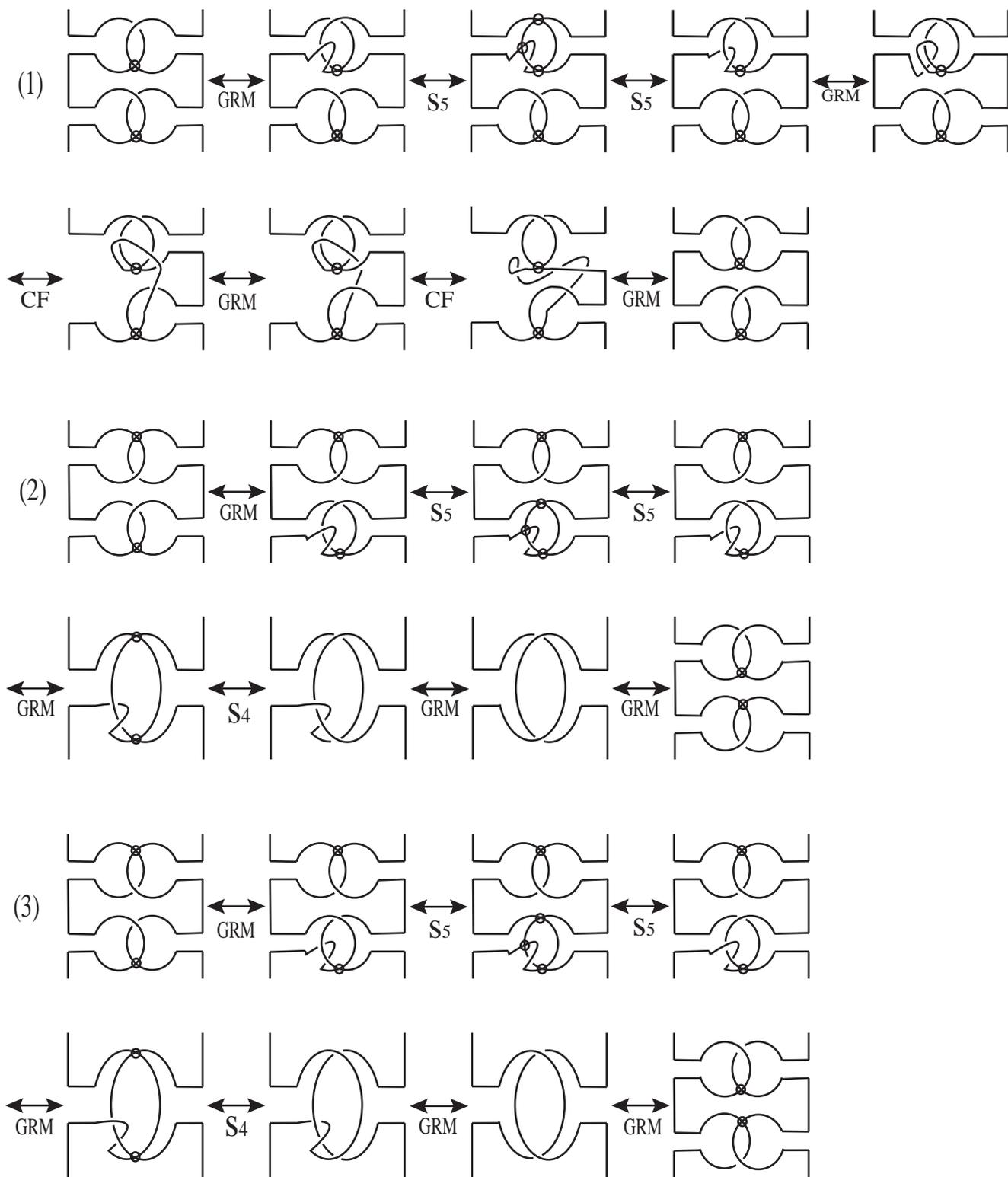


FIGURE 21

Proposition 5.3. $L = K_1 \cup K_2$ を 2-braid virtual link とする. このとき, L は generalized Reidemeister move と CF-move を用いて L の mirror image L' に変形することができる.

Proof. 証明は, 具体的に Fig.22 の変形で示す. 2 番目から 4 番目の変形は, Lemma 4.1 を用いて変形できる. そのとき, K_1 と K_2 の間の全ての real crossing の上下は逆になる.

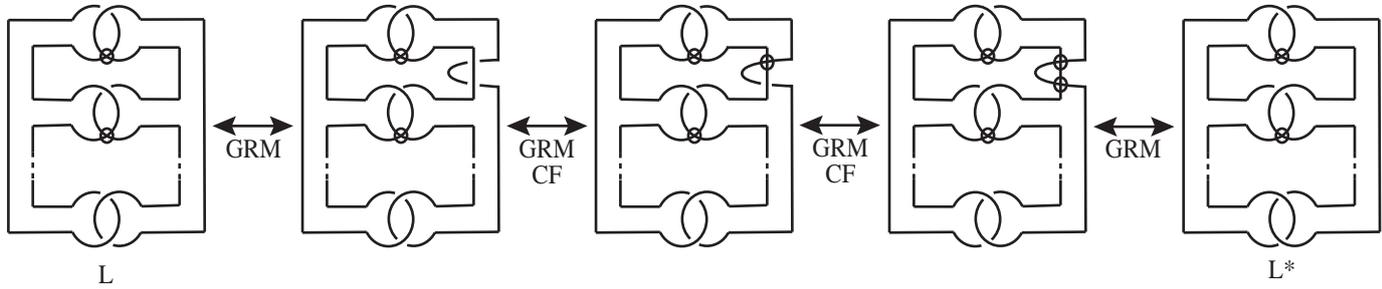


FIGURE 22

こうして, 2-component virtual link を 2-braid virtual link に変形し, Lemma 5.2 を用いて virtual Hopf tangle を交換していく. そして Fig.23 のように, virtual Hopf tangle をできるだけ減らす.

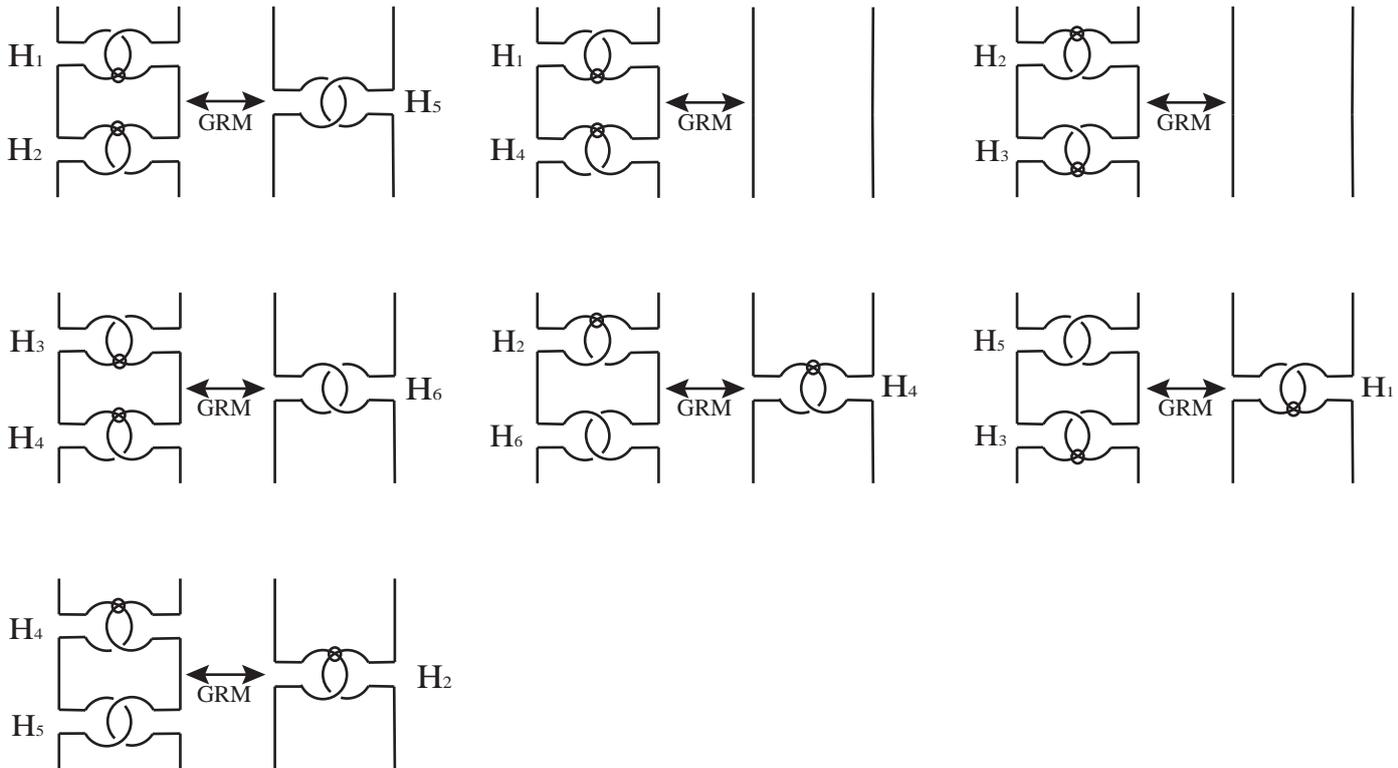


FIGURE 23

Fig.23 により, virtual Hopf tangle H_1 と H_3 , H_2 と H_4 は共存可能である. しかし, H_1 と H_2 , H_3 と H_4 , H_2 と H_3 , H_1 と H_4 は共存不可能である. それらの変形の過程において, H_5 , H_6 が生成される. しかし, その 2 つは共存不可能となる. よって, 任意の 2-braid virtual link は次の 4 つのうちの 1 つに変形できる.

- (1) $L(m_1; 0; m_3; 0; m_5; 0)$
- (2) $L(0; m_2; 0; m_4; m_5; 0)$
- (3) $L(m_1; 0; m_3; 0; 0; m_6)$
- (4) $L(0; m_2; 0; m_4; 0; m_6)$

(1) において, H_3 と H_5 で H_1 が生成されることから, $m_3 > m_5$ のとき, 2-braid virtual link は $L(m_1; 0; m_3; 0; 0; 0)$ -(A) になる. また $m_3 \leq m_5$ のとき, $L(m_1; 0; 0; 0; m_5; 0)$ -(B) になる. (2) において, 2-braid virtual link は $L(0; m_2; 0; m_4; 0; 0)$ -(C) または $L(0; m_2; 0; 0; m_5; 0)$ -(D) になる. Proposition 5.3 より, (3) は (2) へ, (4) は (1) へそれぞれ変形できる. μ が半整数のとき, 2-braid virtual link diagram において, generalized Reidemeister move と CF-move を用い, Fig.24, 25 のように crossing change することができる. (C) と (D) は, (A) と (B) と同じように変形できる. Fig.24, 25 より, (A) と (B) は crossing change により, H_1 だけの形に変形できる. (C) と (D) は crossing change により, H_2 だけの形に変形できる. (A) と (B) は, $\mu = \frac{m_1}{2}$ である $L(m_1; 0; 0; 0; 0; 0)$ に変形できる. (C) と (D) は, $\mu = -\frac{m_2}{2}$ である $L(0; m_2; 0; 0; 0; 0)$ に変形できる. generalized Reidemeister move と CF-move で virtual linking number は変わらないので, 2-component virtual link は次のように変形できる.

- (1) $L(2\mu; 0; 0; 0; 0; 0)$ if $\mu > 0$;
- (2) $L(0; -2\mu; 0; 0; 0; 0)$ if $\mu < 0$.

同様に, μ が整数のとき, L は (A), (B), (C), (D) のいずれかに変形できる. μ と Definition 2.2 で定義した $n(L)$ を計算すると次のようになる.

- (A) $\mu = \frac{m_1+m_3}{2}$, $n(L) = m_1 - m_3$ より, $m_1 = \frac{2\mu+n(L)}{2}$, $m_3 = \frac{2\mu-n(L)}{2}$.
- (B) $\mu = \frac{m_1}{2}$, $n(L) = m_1 + 2m_5$ より, $m_1 = 2\mu$, $m_5 = \frac{n(L)-2\mu}{2}$.
- (C) $\mu = \frac{-m_2-m_4}{2}$, $n(L) = m_2 - m_4$ より, $m_2 = \frac{-2\mu+n(L)}{2}$, $m_4 = \frac{-2\mu-n(L)}{2}$.
- (D) $\mu = -\frac{m_2}{2}$, $n(L) = m_2 + 2m_5$ より, $m_2 = -2\mu$, $m_5 = \frac{n(L)+2\mu}{2}$.

(A) と (C), (A) と (D), (B) と (C), (B) と (D) はそれぞれ, virtual linking number が異なるので変形できない. (A) と (B) は virtual linking number が同じとき, $n(L)$ は異なり, $n(L)$ が同じとき, virtual linking number は異なるのでそれらは generalized Reidemeister move と CF-move を用いて変形できない. (C) と (D) も同様に変形できない. こうして (A), (B), (C), (D) はそれぞれ, 移り合わない. Fig.23 より, H_5 は H_1 と H_2 へ変形できる. よって次の結果が得られる. μ が整数の時, virtual linking number と $n(L)$ を用いて, 以下のよう
に L を分類できる.

- $L(\frac{2\mu+n(L)}{2}; 0; \frac{2\mu-n(L)}{2}; 0; 0; 0)$ if $0 \leq n(L) < 2\mu$;
- $L(0; \frac{-2\mu+n(L)}{2}; 0; \frac{-2\mu-n(L)}{2}; 0; 0)$ if $0 \leq n(L) < -2\mu$;
- $L(\frac{2\mu+n(L)}{2}; \frac{-2\mu+n(L)}{2}; 0; 0; 0; 0)$ if $0 \leq |2\mu| \leq n(L)$.

よって, Theorem 3.2 は示せた.

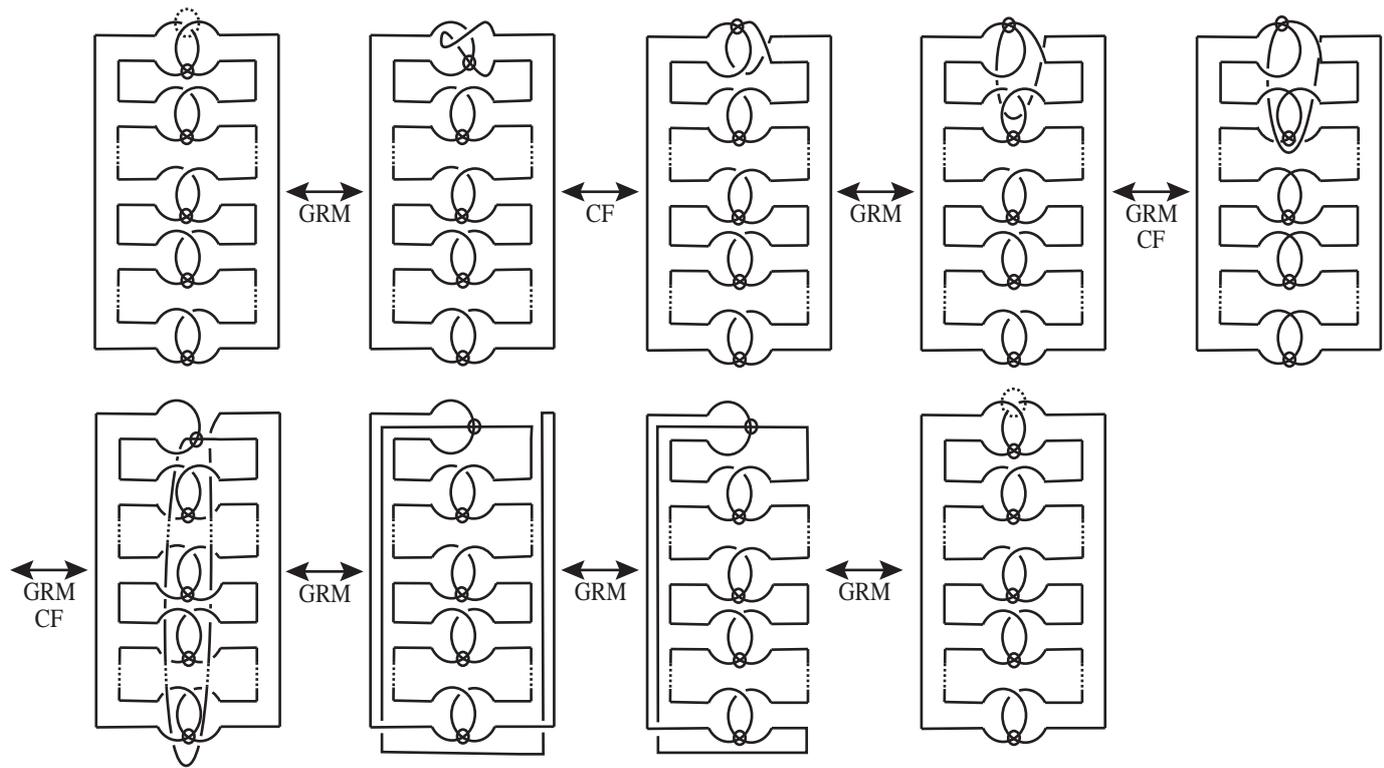


FIGURE 24

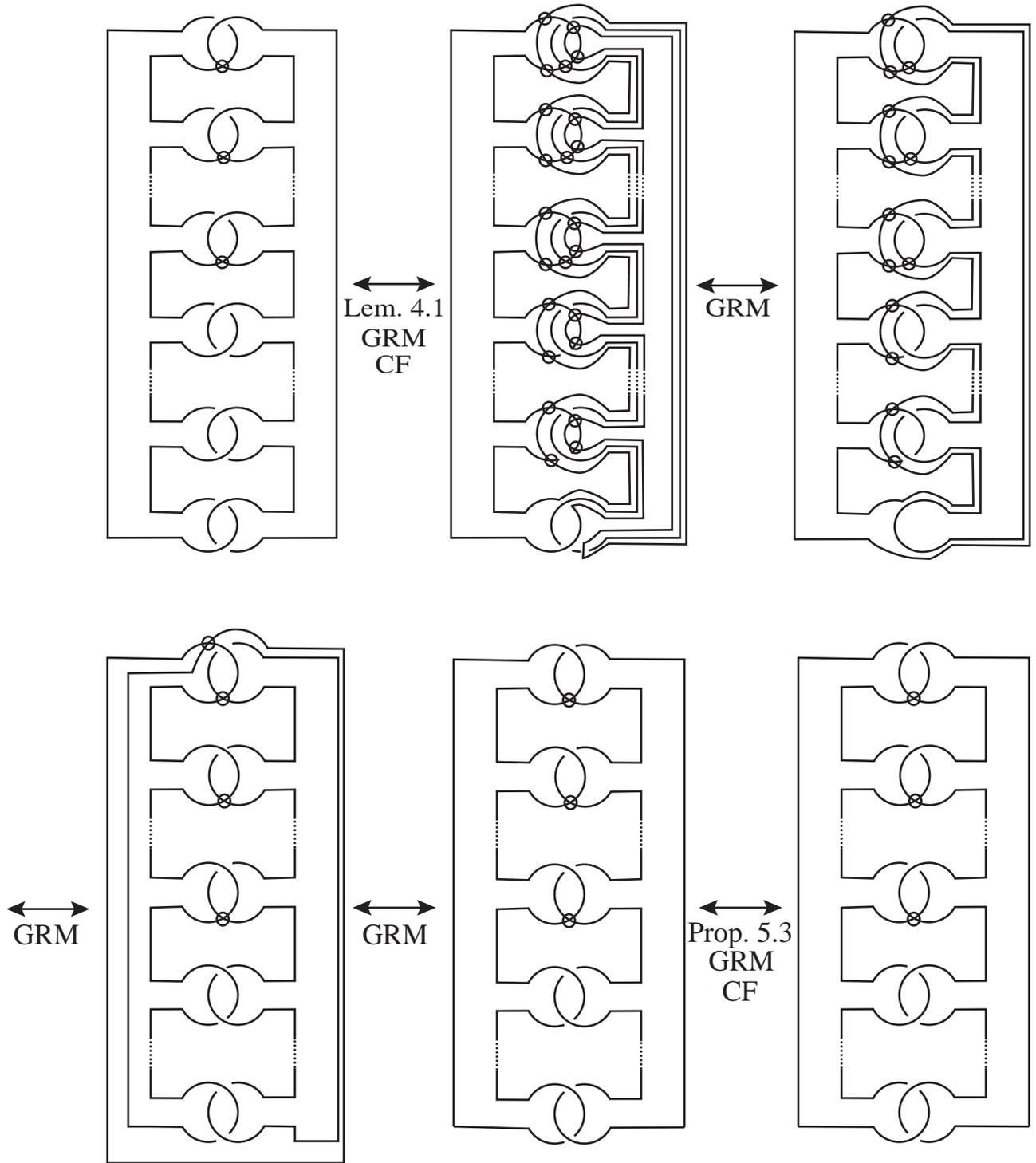


FIGURE 25

参考文献

- [1] T. Kanenobu, Forbidden moves unknot a virtual knot, *J. Knot Theory Ramifications* 10(2001), 89-96.
- [2] S. Nelson, Unknotting virtual knots with Gauss diagram forbidden moves, *J. Knot Theory Ramifications* 10(2001), 931-935.
- [3] T. Oikawa, On a local move for virtual knots and links, preprint.
- [4] T. Okabayashi, Forbidden moves for virtual links, *Kobe J. Math* 22(2005), 49-63.

On strongly almost trivial spatial graphs

花木 良*

早稲田大学大学院教育学研究科

概要

グラフ G の空間埋め込みが、非自明で、 G の任意の真部分グラフ H に対して射影像が自明になる射影をもつとき、その空間埋め込みを強概自明 (SAT) という。SAT な空間埋め込みをもつグラフともたないグラフが存在することが知られており、今までに SAT をもつグラフ、グラフが SAT をもたないための十分条件が知られているが、あまり研究は進んでいない。本文では、新たに発見した SAT をもつグラフおよび SAT をもたないことが示せたグラフの紹介をする。SAT の応用として、IP に関する話題も紹介する。また、グラフが SAT をもつ (もたない) という性質はマイナーに遺伝しないことも示す。

1 はじめに

1.1 定義

有限グラフを G とし、自然に位相空間と考えます。 G から 3 次元空間 \mathbb{R}^3 への埋め込みを、 G の空間埋め込み (spatial embedding) といい、その像を空間グラフ (spatial graph) といいます。 f, f' を G の空間埋め込みとしたとき、 f と f' が同値 (equivalent) であるとは、 $h \circ f = f'$ となる \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への向きを保存する自己同相写像 h が存在するときをいいます。 f が自明 (trivial) であるとは、 f と同値な G から \mathbb{R}^3 の部分空間 \mathbb{R}^2 への埋め込み f' が存在するときをいいます。 G が平面的 (planar) であるとは、 G から \mathbb{R}^2 への埋め込み f が存在するときをいいます¹。したがって、 G が平面的であるときに限り、 G は自明な空間埋め込みをもつことになります。

G から \mathbb{R}^2 への連続写像 φ が G の射影 (projection) であるとは、 φ の多重点が有限個の辺の横断的な二重点のみ有的时候をいいます。このとき、射影の像を射影像 (regular projection) といいます。二重点を交差点 (crossing) といい、さらにある 1 本の辺の像の二重点を自己交差点 (self-crossing) といいます。 φ が空間埋め込み f の射影であるとは、 f と同値な $\varphi = \pi \circ f'$ となる f' が存在するときをいいます。ここで π は \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^2 への自然な射影です。このとき、 f は φ から得られるといいます。射影 φ が自明 (trivial) であるとは、 φ から得られる空間埋め込みが自明のものだけのときをいいます。

*r.t@fuji.waseda.jp

¹ちなみに、平面的グラフの任意の平面への埋め込み f, f' は、 \mathbb{R}^3 内で同値であることが知られています ([7])。

グラフ G の空間埋め込み f が概自明 (almost trivial) であるとは, G の任意の真部分グラフ H に対して $f|_H$ が自明な空間グラフのときをいいます. 概自明の定義の条件に「 f は非自明である」を加えたものを極小非自明 (minimally knotted) といいます. 図 2 の f は, θ 曲線の極小非自明な空間埋め込みの例です. 絡み目でいうと, Brunnian はこの性質を満たしています (図 1).

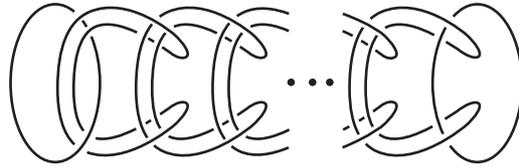


図 1: Brunnian 絡み目

グラフ G の空間埋め込み f が強概自明 (strongly almost trivial) であるとは, f が非自明で, G の任意の真部分グラフ H に対して $\hat{f}|_H$ が自明となる f の射影 \hat{f} が存在するときをいい, 強概自明を省略して SAT と記し, SAT な空間埋め込みを SAT 埋め込みと記します. そのような射影の像を SAT 射影像と記します. 例えば, θ 曲線は SAT 埋め込みをもつことが知られています (図 2).



図 2: θ 曲線の SAT 埋め込み

1.2 SAT と関連すること

グラフ G の射影 φ が特定可能 (identifiable) であるとは, φ から得られるどの空間埋め込みも同値であるときをいいます. 特定可能な射影を IP と記します. 例えば, 平面的グラフの \mathbb{R}^2 への埋め込みは IP です. また, 図 3 も IP です. グラフ G の射影 φ が概特定可能 (almost identifiable) であるとは, G の任意の真部分グラフ H に対して, $\varphi|_H$ が IP であるときをいいます. 概特定可能な射影を AIP と記します. IP なら AIP ですが, 逆は成り立ちません. その反例としては, 図 5, 6, 7 の空間埋め込みの図の上下を忘れて射影像と思ったものがあります.

非平面的グラフは, IP をもたないことが知られています ([2, Proposition 1.1]). そして, 平面的グラフの IP の特徴として, 次の定理が知られています.

定理 1.1 [8, Theorem 1.2] 平面的グラフの射影が IP であるための必要十分条件は, その射影から得られるすべての空間埋め込みが自明であることである.

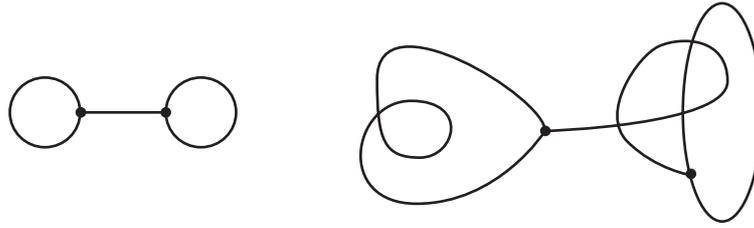


図 3: 手錠グラフの IP

つまり, IP は自明な射影に限るということです. そして, SAT との関連として, 次の定理が知られています.

定理 1.2 [8, Theorem 1.4] 平面グラフ G を SAT 埋め込みをもたないグラフとする. G の射影が IP であるための必要十分条件は, それが AIP であることである.

つまり, SAT 埋め込みをもたないグラフの IP の判定は, 真部分グラフの IP を見ればよいということです. そして, さらにその部分グラフが SAT をもたないなら, IP の判定はその真部分グラフに帰着できます. したがって, SAT をもつグラフともたないグラフが完全に分類されていれば, 特定の (SAT をもつ) 部分グラフから元のグラフの IP が判定できることとなります.

$G = S^1$ (結び目) の IP は, 図 4 のようなものに限られることが知られています ([13]). ここで, 正則射影像 \hat{P} 上の交差点 c で, $\hat{P} - c$ の連結成分数が \hat{P} より多くなる時, c は本質的でない (nugatory) といいます. ですから, 正確には S^1 の IP は, 本質的でない交差点のみをもつものに限られるということです. $G = S^1 \amalg \dots \amalg S^1$ (絡み目) に関しても同様のことがいえます.

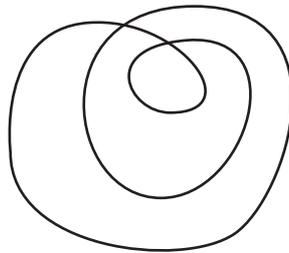


図 4: S^1 の IP

1.3 知られていること

問題 1.3 どのようなグラフが極小非自明な空間埋め込みをもつでしょうか?

この問題には, すべての頂点の次数が 2 以上であるすべての平面的グラフは, 極小非自明な空間埋め込みをもつという結果が知られています ([5], [17]).

このことから, 絡み目では Brunnian があるように, 平面的グラフも同じように極小非自明な空間埋め込みをもつことがわかります.

問題 1.4 どのようなグラフが SAT 埋め込みをもつでしょうか？

こちらは、もつものともたないものが存在することは知られていますが、あまりよくわかっていません。SAT 埋め込みをもつことを知られているグラフは、 θ 曲線と θ_n 曲線 ([11])、手錠グラフ ([15]) くらいです。図 5, 6, 7 が SAT 埋め込みで、これらの図の上下を忘れたものが SAT 射影像になっています。

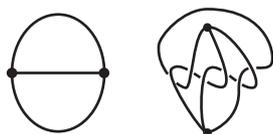


図 5: θ 曲線と SAT



図 6: θ_n 曲線と SAT

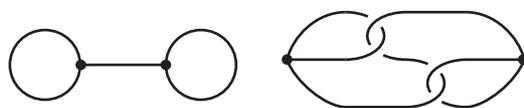


図 7: 手錠グラフと SAT

そして、すべての平面的グラフが SAT 埋め込みをもつというわけではないことが、次の定理とその仮定を満たすグラフの存在からわかります。

定理 1.5 [4, Theorem 1.1] G を、各頂点の次数が 3 以上で、切断頂点をもたない、連結な平面的グラフとする。 G が次の 3 つの条件

- (1) G は多重辺をもたない
 - (2) G の交わりのない 2 辺 e_1, e_2 に対して、それぞれ e_1, e_2 を含むような交わりのない 2 つのサイクルが存在する
 - (3) G の和集合が道と同相となるような 3 辺 e_1, e_2, e_3 に対して、それらを含むサイクルが存在する
- を満たすとき、
 G は SAT 埋め込みをもたない。

この定理の仮定を満たすグラフとしては、図 8 のようなグラフ P_n (n 個の頂点でサイクルを作り、それに北極と南極の頂点を加えてそれらと各サイクルの頂点を結んだグラフ) がありま

す、また、4頂点完全グラフ K_4 は仮定の (2) を満たしません、SAT 埋め込みをもたないことがわかっています ([4])。二重手錠グラフは仮定の (1) と (2) を満たしません、SAT 埋め込みをもたないことがわかっています ([1])。

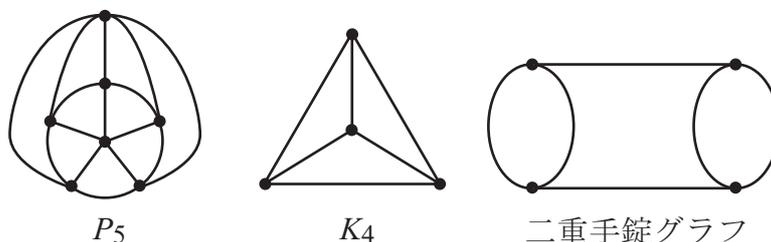


図 8: SAT をもたないグラフ

問題 1.6 G が n 個の S^1 の分離和の場合 (つまり、結び目や絡み目の場合) は、SAT をもつでしょうか？

$n = 1$ のときと $n = 2$ のときは、SAT をもちます。 $n = 1$ のときは、どんな非自明な結び目も SAT 埋め込みです。 $n = 2$ のときは、Hopf 絡み目などが SAT 埋め込みです。 $n \geq 3$ のときは、SAT をもちません。なぜなら、 $n \geq 3$ のとき、SAT をもつとします。1組 S^1 が射影図上で交わっていれば、その部分グラフをとって来ると、Hopf 絡み目が得られ矛盾します²し、1組も交わっていなければ、SAT 埋め込みは自明でないことから S^1 のひとつの射影像は自明でなく、その部分グラフをとって来ると、自明でない結び目が得られ矛盾します。このように G が n 個の S^1 の分離和の場合だけを考えても、SAT をもつものともたないものがあります。

2 わかったこと

グラフを位相空間として考えているので、次数 2 の頂点はないものとします。ただし、ループ (自分自身を結んだ辺) が 1 本だけ出ている頂点は除きます。

定理 2.1 n -bouquet は、SAT 埋め込みをもつ。ここで、 n -bouquet とは 1 個の頂点とそれを結ぶ n 本のループでできたグラフである。

これは、図 9 で表した空間埋め込みが SAT になっていて、その上下を忘れたものを射影像と思えば、それが SAT 射影像になっています。

次に、グラフ F を林 (forest) とします。ここで、林とは 1 次元ベッチ数が 0 のグラフです。そして、 F の次数 1 の頂点にループをつけたグラフを G_F とします (図 10)。すると、次の定理が成り立ちます。

定理 2.2 $E(F) \neq \emptyset$ ならば、 G_F は SAT 埋め込みをもつ。

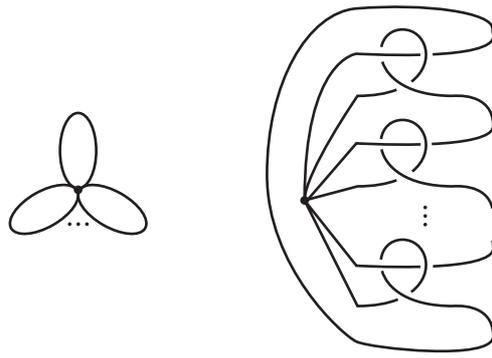


図 9: n -bouquet とその SAT 埋め込み

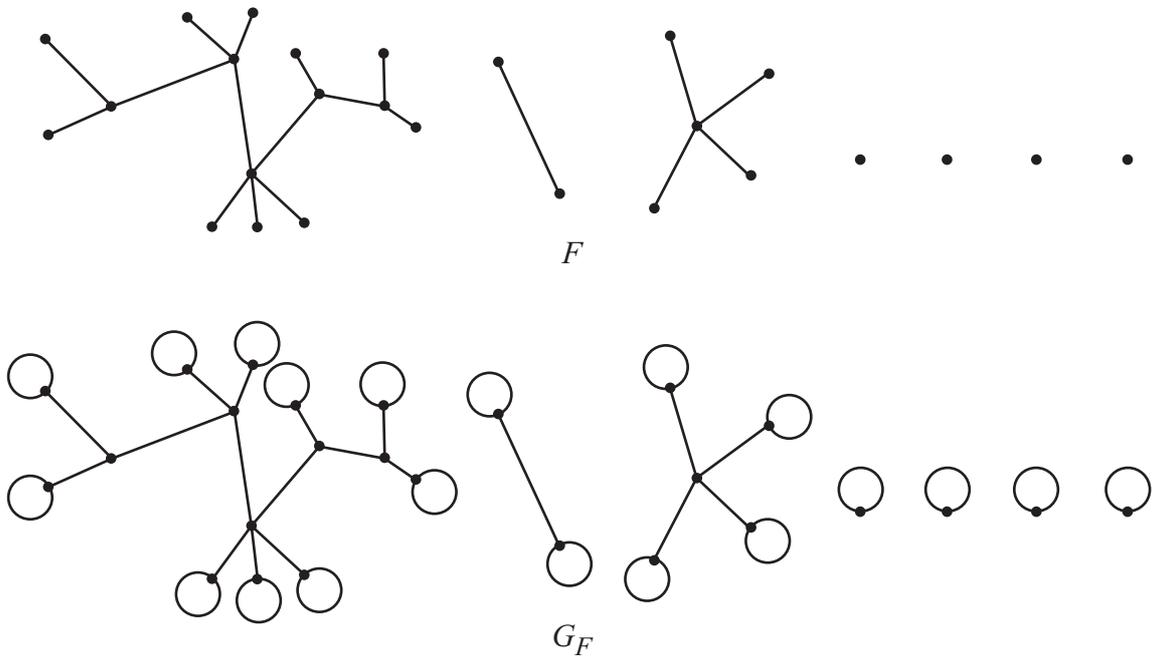


図 10: 林 F と G_F

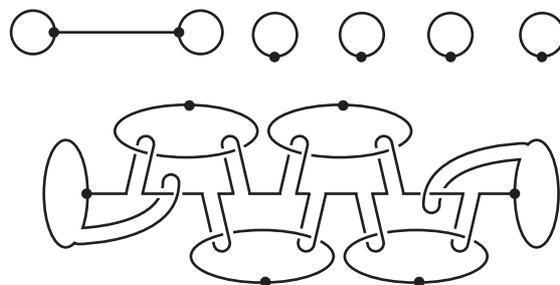


図 11: 定理 2.2 の仮定を満たすグラフと SAT 埋め込み

例えば、 S^1 の 3 個以上の非分離和は SAT 埋め込みをもちませんが、図 11 のように F が 1 本でも辺をもつことで SAT 埋め込みをもつことになります。

さて、ここで図 11 は、いろいろなところにフックをつけた形になっています。これから図の簡略化のためにフックを破線で表すことにします。図 11 を図 12 のように描くことにします。破線で表すことでフックの先端がどちらについているかという曖昧さがありますが、それは同値変形ができます。また、フックの上下の曖昧さもありますが、どちらかが上になっていて引っかかっているということにします。

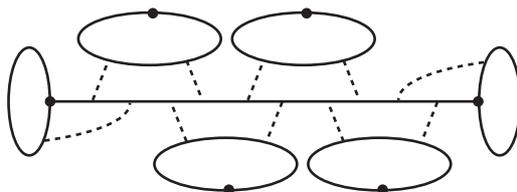


図 12: 図 11 のフック表示

一般に、構成方法は、図 13 の左側のようにループのついていない頂点の周りにフックをつけたり、図の右側のようにフックを増やしたり、図 14 のように連結成分をフックで繋いだりします。具体的には図 15 のようになります。

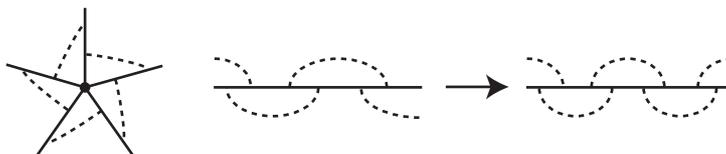


図 13: SAT の構成方法 1

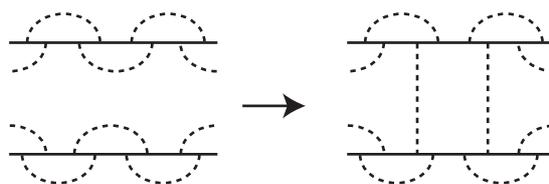


図 14: SAT の構成方法 2

定理 2.3 G は連結で手錠グラフと同相ではないとし、 G が切断辺 e を 1 本もち、 $G - e$ の連結成分を H_1, H_2 とする。このとき、 H_1, H_2 は切断辺をもたず、サイクルをもつならば、 G は SAT 埋め込みをもたない。

この定理から、次の図 16 のようなグラフは SAT 埋め込みをもたないことがわかります。

²ホップ絡み目が得られるという議論は [14] に由ります。

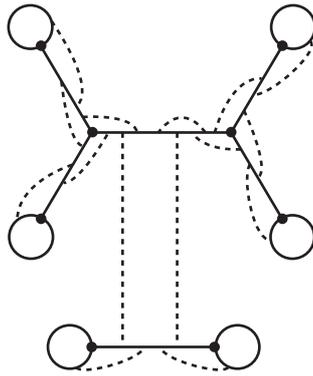


図 15: SAT 埋め込みの具体例

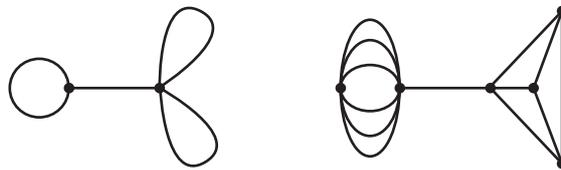


図 16: SAT 埋め込みをもたない, 切断辺をもつグラフ

3 マイナーに関して

グラフ全体の族に, 部分グラフという関係は半順序ですが, グラフの研究をするときには, グラフ全体の族を, これから紹介するマイナーという半順序関係で考えることが有用であることが知られています.

まず, グラフを変形する操作を定義します. G から辺 e を除去とは, G から e のみを取り除くことです. G の辺 e の縮約とは, e の両端点の頂点を縮めて 1 個の頂点にする変形です. ここで, 縮約する辺はループ (自分自身を結んだ辺) ではないことにします.

そして, グラフ G から辺の除去と縮約および孤立点の除去を繰り返して H が得られるとき, H は G のマイナーであるといい, $H \prec_m G$ と記します.

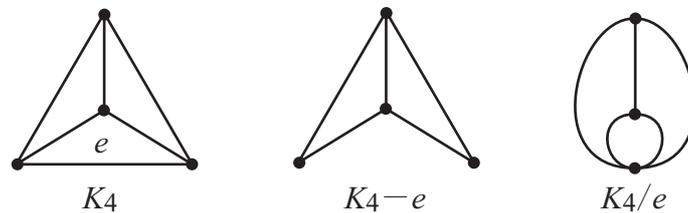


図 17: 辺の除去と辺の縮約

グラフの性質がマイナーに遺伝する (inherit) とは, その性質をもつグラフがあったら, そのグラフのマイナーも同じようにその性質をもつときをいいます. ある性質がマイナーに遺伝するとき, その性質に対する特徴づけが次のように有限個のグラフを用いてできることが知ら

れています ([10])。「グラフがある性質をもつための必要十分条件は、 G_1, G_2, \dots, G_n をマイナーに含まないことである」

例えば、グラフが平面的であるという性質は、マイナーに遺伝し、有名な Kuratowski の定理「グラフが平面的であるための必要十分条件は、 K_5 または $K_{3,3}$ をマイナーに含まないことである」³ という特徴づけがなされています。

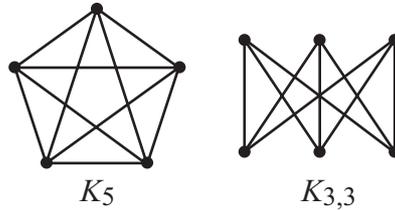


図 18: K_5 と $K_{3,3}$

リマーク 3.1 グラフが SAT 埋め込みをもつ (もたない) という性質はマイナーに遺伝しない。(図 19)

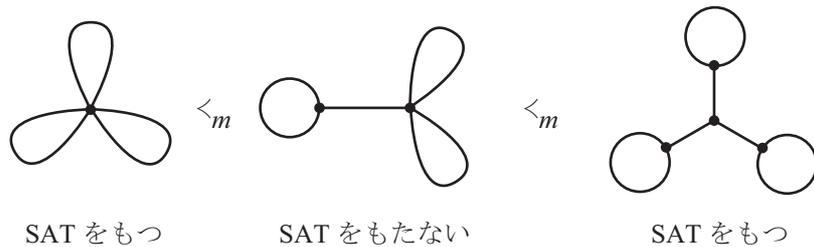


図 19: グラフが SAT 埋め込みをもつ (もたない) ことがマイナーに遺伝しないことを示す例

4 証明方法の一部

定理 2.2 で、得られる SAT 埋め込みが非自明であることを示す方法について紹介します。この方法は、切断頂点か切断辺をもつまたは非連結なグラフの埋め込みの非自明性を示すのに有用です。また、ここではグラフは \mathbb{R}^3 ではなく \mathbb{S}^3 に埋め込まれているものとします。

\mathbb{S}^3 に埋め込まれたグラフが既約 (irreducible) であるとは、その空間グラフは非分離的で、 \mathbb{S}^3 中のグラフと 1 点で交わる任意の 2 次元球面 S に対して、それは 2 次元球面 S で囲まれた 3 次元球体のどちらか一方に含まれるときをいいます。

そこで、切断頂点か切断辺をもつまたは非連結なグラフは、自明な場合には既約ではありませんので、その空間グラフが既約であれば、その空間グラフの非自明性が示せたことになり

³もともとの平面的グラフの特徴づけは、マイナーではなく、「 K_5 または $K_{3,3}$ と同相」という形でしたが、このようにした定理も成り立ちます。

ます．そして，埋め込まれたグラフに対して既約であることを保存する変形が与えられており，それを使うことで，ある空間グラフに対しては非自明性が容易に示せます．

G を S^3 に埋め込まれたグラフとし， S^3 に埋め込まれたディスク D が G にとって良い (good for G) とは， ∂D が G に含まれ， $\text{int}D \cap G$ は多くても有限個の点で，その各点の近傍は図 20 のようになっている場合をいいます．ここで， p と q は自然数です．言い換えると， $\text{int}D$ と G の辺が接してはいけないということです．

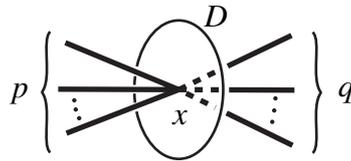


図 20: $\text{int}D \cap G$ の各点の近傍

定理 4.1 ([16]) G を S^3 に埋め込まれたグラフ， D を S^3 に埋め込まれた G にとって良いディスクとする． $\text{int}D \cap G$ が，空集合でないか， $\partial D \cap \text{cl}(G - \partial D)$ が 1 点でないとし， G' を D を 1 点に縮約して G から得られたグラフとする．このとき， G' が既約ならば， G も既約である．

この定理を使うことによって，Borromean 環は，図 21 のようにディスクを縮約していくと (c) が得られ，これは抽象的なグラフとして切断頂点をもたないことから，既約であることがわかり，Borromean 環が非自明であることが示せたこととなります．

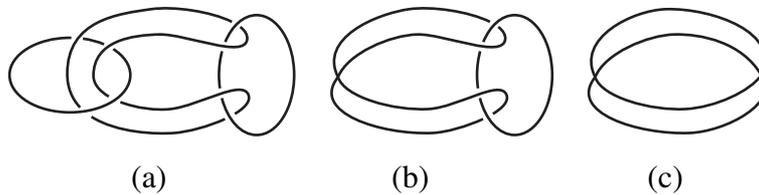


図 21: Borromean 環の非自明性

そして，同様にして，定理 2.2，2.3 に出てくる切断辺をもつグラフの非自明性を証明します．例えば，図 11 は，各ループを縮約すると，図 22 のようになります．得られたグラフは切断頂点をもたないことから，図 11 の空間グラフの非自明性が示せたこととなります．

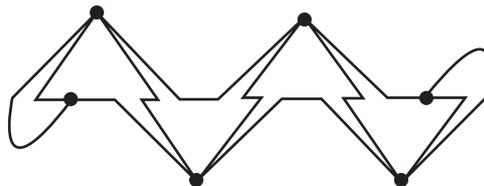


図 22: 図 11 の非自明性

5 謝辞

この研究の契機を与えてくださり，さらに多大な助言をして頂いた新國亮氏に感謝致します．
さまざまなご指摘やご指導をしてくださいました鈴木晋一先生，谷山公規先生，小沢誠先生に
感謝致します．

参考文献

- [1] R. Hanaki: Regular projections of knotted double-handcuff graphs, preprint.
- [2] Y. Huh, K. Taniyama: Identifiable projections of spatial graphs, *J. Knot Theory Ramif* 13 (2002), 991-998.
- [3] Y. Huh, G. T. Jin, and S. Oh: An elementary set for θ_n -curve projections, *J. Knot Theory Ramif* 11 (2002), 1243-1250.
- [4] Y. Huh and S. Oh: Planar graphs producing no strongly almost trivial embedding, *J. Graph Theory*. 43 (2003), 319-326.
- [5] A. Kawauchi: Almost identical imitations of $(3, 1)$ -dimensional manifold pairs, *Osaka J. Math.* 26 (1989), no.4, 743-758.
- [6] 小林一章: 空間グラフの理論 (培風館, 1995)
- [7] W. K. Mason: Homeomorphic continuous curves in 2-space are isotopic in 3-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 142 (1969), 269-290.
- [8] R. Nikkuni: A remark on the identifiable projections of planar graphs, *Kobe J. Math.* 22 (2005), 65-70.
- [9] R. Nikkuni: Regular projections of spatial graphs, *Knot Theory for Scientific Objects*, Osaka City University Advanced Mathematical Institute Studies 1 no. 1, 111-128, Osaka Municipal Universities Press, 2007.
- [10] N. Robertson and P. Seymour, Graph minors XVI. Wagner's conjecture, preprint.
- [11] S. Suzuki: Almost unknotted θ_n -curves in the 3-sphere, *Kobe J. Math.* 1 (1987), 19-22.
- [12] 鈴木晋一: 結び目理論入門 (サイエンス社, 1991)
- [13] K. Taniyama: A partial order of knots, *Tokyo J. Math.* 12 (1989), 205-229.
- [14] K. Taniyama: A partial order of links, *Tokyo J. Math.* 12 (1989), 475-484.
- [15] K. Taniyama and C. Yoshioka: Regular projections of knotted handcuff graphs, *J. Knot Theory Ramif.* 7 (1998), 509-517.
- [16] K. Taniyama: Irreducibility of spatial graphs, *J. Knot Theory Ramif.* 11 (2002), 121-124.
- [17] Y. Q. Wu, Minimally knotted embeddings of planar graphs, *Math. Z.* 214 (1993), 653-658.

〒 169-8050 東京都 新宿区 西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部 数学科

Surface knot invariants with symmetric quandles and triple linking numbers

大城 佳奈子 (広島大学大学院理学研究科数学専攻 M2)

1 定義

1.1 Symmetric カンドル

Definition 1.1.1. X がカンドル $:\Leftrightarrow X$ が次の性質を満たす二項演算 $(a, b) \mapsto a * b$ をもつ集合

- (Q1) $\forall a \in X, a * a = a.$
- (Q2) $\forall a, b \in X, \exists! c \in X$ s.t. $c * b = a.$
- (Q3) $\forall a, b, c \in X, (a * b) * c = (a * c) * (b * c).$

(Q2) の c を $a * b^{-1}$ と表す.

Definition 1.1.2. X : カンドル

写像 $\rho : X \rightarrow X$ が good involution $:\Leftrightarrow$

- (1) $\rho \circ \rho = \text{id}$ (ρ が involution)
- (2) $\rho(a * b) = \rho(a) * b$ ($\forall a, b \in X$)
- (3) $a * \rho(b) = a * b^{-1}$ ($\forall a, b \in X$)

(X, ρ) \cdots symmetric カンドル

1.2 Trivial カンドルからなる symmetric カンドル

X を任意の集合とする. X のもつ演算を $a * b = a$ ($a, b \in X$) と定めると X はカンドルになる. このとき X を trivial カンドルといい、特に X が n 個の元からなるときこのカンドルを T_n と表す.

Lemma 1.2.1. X : カンドル

X が trivial カンドル $\Leftrightarrow X$ の任意の involution が good involution

2 Symmetric カンドルのホモロジー群

2.1 Symmetric カンドルホモロジー群

X : カンドル

$$C_n = \begin{cases} \bigoplus_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \mathbb{Z}\langle (x_1, \dots, x_n) \rangle & (n \geq 1) \\ 0 & (n < 1) \end{cases}$$

n 次境界作用素 $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ を次で定める.

$$\begin{aligned} \partial_n[(x_1, \dots, x_n)] &= \sum_{i=2}^n (-1)^i \{ (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\ &\quad - (x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \} \end{aligned}$$

D_n^Q, D_n^ρ をそれぞれ次の集合の全ての元によって生成される C_n の部分 \mathbb{Z} 加群とする .

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ s.t. } x_i = x_{i+1} \right\}$$

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) + (x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, \rho(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \in X \\ i \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right\}$$

★ $\{D_n^Q, \partial_n\}, \{D_n^\rho, \partial_n\}$ は $\{C_n, \partial_n\}$ の部分複体 .
 $\{C_n^{Q\rho}(X) = C_n / (D_n^Q + D_n^\rho), \partial_n\} \implies H_*^{Q,\rho}(X)$

2.2 Trivial カンドルからなる symmetric カンドルホモロジー群

(T_n, ρ) : 位数 n の trivial カンドルからなる symmetric カンドル s.t.

$$T_n = \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, b'_1, \dots, b'_q\}$$

$$\rho(a_i) = a_i, \rho(b_j) = b'_j \quad (\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}).$$

$$A_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in T_n^3 \mid \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \{b_1, \dots, b_q\} \\ x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3 \end{array} \right\}$$

$$B_3 = \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in T_n^3 \mid \begin{array}{l} y_1, y_2, y_3 \in \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q\} \\ \exists i \in \{1, 2, 3\} \text{ s.t. } y_i \text{ は固定点} \\ y_1 \neq y_2, y_2 \neq y_3 \end{array} \right\}$$

Lemma 2.2.1. $H_3^{Q,\rho}(T_n) \cong \oplus \mathbb{Z}\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle \oplus \oplus \mathbb{Z}_2\langle(y_1, y_2, y_3)\rangle$

ここで、 (x_1, x_2, x_3) と (y_1, y_2, y_3) はそれぞれ A_3 と B_3 の元を動く .

3 曲面結び目の不変量

$F = F_1 \cup \dots \cup F_\mu$: 曲面絡み目 s.t. F_i : orientable $\implies F_i$: oriented

$D = D_1 \cup \dots \cup D_\mu$: F の diagram

3.1 Symmetric カンドルを使った曲面結び目の不変量

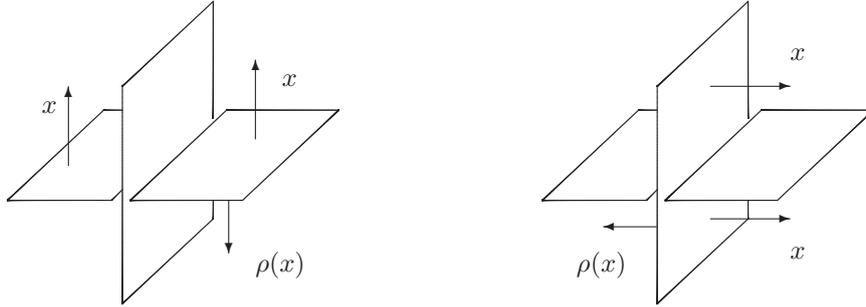
(T_n, ρ) : 位数 n の trivial カンドルからなる symmetric カンドル

D の coloring \dots D の semi-sheet に対する垂直方向と T_n の元の割り当ての同値類



Coloring の同値関係

Coloring の条件



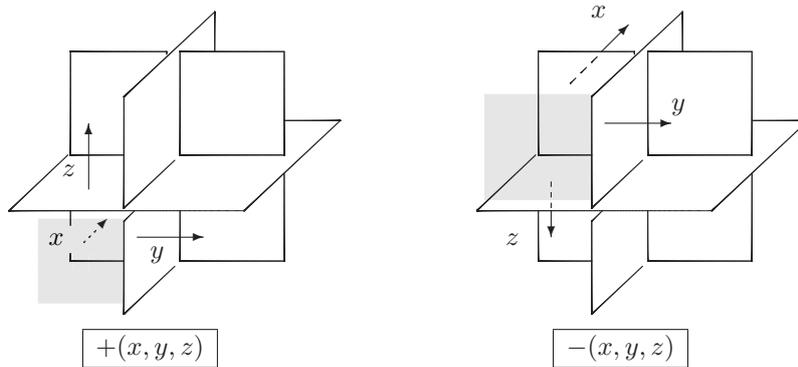
Lemma 3.1.1. D : coloring C が与えられた F の diagram

(i) F_i : oriented. D_i の各 semi-sheet の垂直方向を F_i の向きから定まる方向にとると、 D_i の各 semi-sheet は T_i のある同じ元 x_i でラベル付けされる .

(ii) F_i : un-oriented. D_i の全ての semi-sheet は T_n のある同じ固定点 x_i でラベル付けされる .

diagram D に coloring C を与える $\implies F$ に coloring $C = (x_1, \dots, x_\mu)$ を与える

Triple point で \mathcal{D} の weight

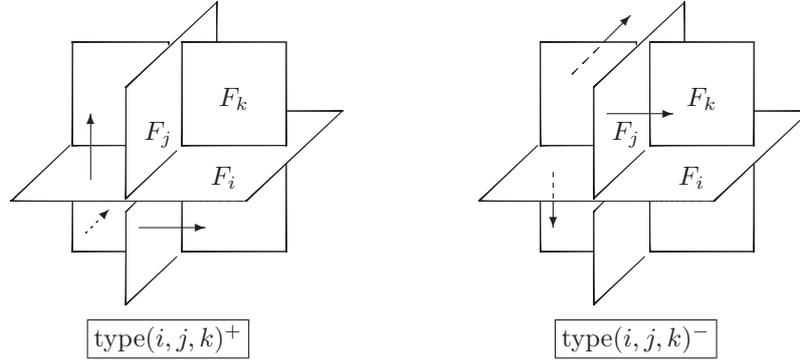


$$D_C := \sum_{\tau: \text{triple point}} \tau \mathcal{D} \text{ weight} \in C_3^{\mathcal{Q}, \rho}(T_n)$$

$\theta : C_{\mathcal{Q}, \rho}^*(T_n; A)$ の 3-cocycle

Lemma 3.1.2. $[D_C] \in H_3^{\mathcal{Q}, \rho}(T_n)$, $\theta(D_C) \in A$ は coloring C が与えられた F の不変量

3.2 Triple linking number



$t_{ijk} := \#\{\text{type } (i, j, k) \text{ の triple point}\} \pmod{2}$ (S.Satoh)

$T_{ijk} := \#\{\text{type } (i, j, k)^+ \text{ の triple point}\} - \#\{\text{type } (i, j, k)^- \text{ の triple point}\}$ (J.S.Carter et.al)

Lemma 3.2.1. $i \neq j, j \neq k \Rightarrow t_{ijk}, T_{ijk}$ はそれぞれ曲面結び目の不変量

4 Good involution 付き曲面結び目不変量の性質

$F = F_1 \cup \dots \cup F_\mu$: 曲面絡み目 s.t. F_i : orientable $\implies F_i$: oriented

p : F の un-oriented 成分の数, $q = \mu - p$: F の oriented 成分の数

Theorem 4.0.2. (i) (T_{p+2q}, ρ) : p 個の固定点を持つ symmetric カンドル
 \exists coloring $C = (x_1, \dots, x_\mu)$ s.t.

$$D_C \equiv \sum_{\substack{(i, j, k) \in \{1, \dots, \mu\}^3 \\ \text{s.t. } F_i, F_j, F_k: \text{ oriented} \\ i \neq j, j \neq k}} T_{ijk}(x_k, x_j, x_i) + \sum_{\substack{(i, j, k) \in \{1, \dots, \mu\}^3 \text{ s.t.} \\ F_i, F_j, F_k \text{ の幾つかは un-oriented} \\ i \neq j, j \neq k}} t_{ijk}(x_k, x_j, x_i)$$

ただし、各 (x_k, x_j, x_i) は $H_3^{\mathbb{Q}, \rho}(T_{p+2q})$ の互いに異なる生成元

(ii) (T_n, ρ) : symmetric カンドル

任意の coloring $C = (x_1, \dots, x_\mu)$ に対し、 $[D_C]$ は triple linking number を使って表わすことが出来る .

Theorem 4.0.3. $i, j, k \in \{1, \dots, \mu\}$ ($i \neq j, j \neq k$)

(i) (T_{p+2q}, ρ) : p 個の固定点を持つ symmetric カンドル

$\exists C$: coloring of F , $\exists \theta_{ijk} : C_3^{\mathbb{Q}, \rho}(T_{p+2q}) \rightarrow \mathbb{Z}$: 3-cocycle s.t.

$$\theta_{ijk}(D_C) = T_{ijk} (F_i, F_j, F_k : \text{ori.})$$

(ii) (T_{p+q}, id) : symmetric カンドル

$\exists C$: coloring of F , $\exists \tau_{ijk} : C_3^{\mathbb{Q}, \text{id}}(T_{p+q}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$: 3-cocycle s.t.

$$\tau_{ijk}(D_C) = t_{ijk}$$

Research of Hurwitz action of braid group and its application

広島大学大学院理学研究科 矢口義朗

2008年2月14日

1 ブレイドシステムと Hurwitz 作用

m 次ブレイド群とは、次で表示される群のことである；

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad (|i-j|=1) \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j|>1) \end{array} \right\rangle$$

ここで、 σ_i は標準的生成元とよばれ、図1のような m 次ブレイドを表す。

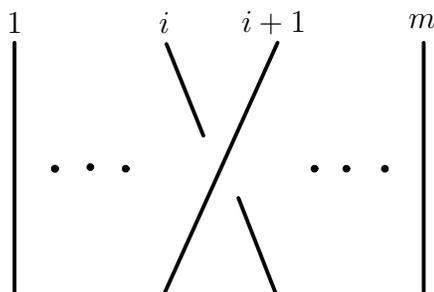


図1

長さ n の m 次ブレイドシステムとは、直積 B_m^n の元のことをいう。ところで、 n 次ブレイド群 B_n は B_m^n への自然でかつ幾何学的な右作用を持つ。この作用を Hurwitz 作用と呼ぶ。具体的には、この群作用は次で定義される：

定義 1.1. 写像

$$\phi : B_m^n \times B_n \longrightarrow B_m^n$$

を、 $\sigma_i \in B_n$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in B_m^n$ に対して、

$$\phi(\beta_1, \dots, \beta_n, \sigma_i) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot \sigma_i,$$

$$\begin{aligned}
& (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \dots, \beta_n) \cdot \sigma_i \\
&= (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \beta_{i+1}^{-1} \beta_i \beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \dots, \beta_n)
\end{aligned}$$

で定義すると、これは右作用になる。これを Hurwitz 作用という。

Hurwitz 作用は、図 2.2 のように n -ブレイド σ_i の arc にラベル付けを行うことで、視覚的な表現ができる。この意味で Hurwitz 作用は幾何学的なものである。

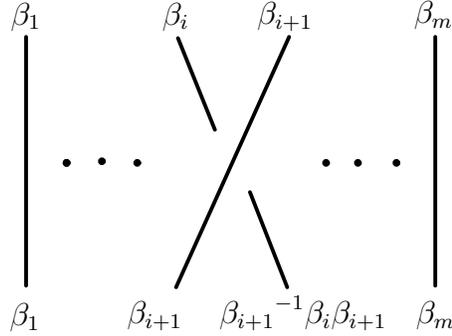


図 2

定義 1.2. 長さ n の m 次ブレイドシステム $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ と $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ がスライド同値であるとは、これらが Hurwitz 作用の同一軌道上にあるときをいう。

注意.

$$\text{trace 写像} : B_m^n \rightarrow B_m, \quad (\beta_1, \dots, \beta_n) \mapsto \beta_1 \cdots \beta_n$$

はスライド同値不変量になる。すなわち、 $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ と $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ が slide equivalent ならば、

$$\text{trace}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \text{trace}(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$$

である。

補題 1.3. 長さ 2 の m 次ブレイドシステム (β_1, β_2) について、 $(\beta_1, \beta_2) \cdot \sigma_1^k$ は次で与えられる；

$$\begin{aligned}
& ((\beta_1 \beta_2)^{-k/2} \beta_1 (\beta_1 \beta_2)^{k/2}, (\beta_1 \beta_2)^{-k/2} \beta_2 (\beta_1 \beta_2)^{k/2}) && (k \text{ が偶数}) \\
& ((\beta_1 \beta_2)^{-(k-1)/2} \beta_2 (\beta_1 \beta_2)^{(k-1)/2}, (\beta_1 \beta_2)^{-(k+1)/2} \beta_1 (\beta_1 \beta_2)^{(k+1)/2}) && (k \text{ が奇数})
\end{aligned}$$

2 Hurwitz 作用の固定群

$(\beta_1, \dots, \beta_n) \in B_m^n$ に対して,

$$H(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{b \in B_n \mid (\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot b = (\beta_1, \dots, \beta_n)\}$$

とする.

・ブレイドシステムの長さが 2 の場合.

定理 2.1. k を正の偶数とする. $H(\beta_1\beta_2) = \langle \sigma_1^k \rangle$ となるならば,

$$(\beta_1\beta_2)^{-k/2}\beta_1(\beta_1\beta_2)^{k/2} = \beta_1.$$

k を正の奇数とする. $H(\beta_1\beta_2) = \langle \sigma_1^k \rangle$ となるならば,

$$(\beta_1\beta_2)^{-(k-1)/2}\beta_2(\beta_1\beta_2)^{(k-1)/2} = \beta_1.$$

注. β_1 と β_2 の間に上記の式を満たす正の整数 k が存在しないときは, $H(\beta_1, \beta_2) = \{id\}$ であることに他ならない.

Question.

$H(\beta_1, \beta_2) = \langle \sigma_1^k \rangle$ となる $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ は (β_1, β_2) のとり方によってどのくらいあるのか?

・ブレイドシステムの長さが 3 の場合.

ここでは 1, 2, 3 はそれぞれ B_4 の標準的生成元を表し, σ_1, σ_2 はそれぞれ B_3 の標準的生成元を表すこととする. $H(1, 2, 3)$ を B_3 の Hurwitz 作用の $(1, 2, 3) \in B_4^3$ における固定群とする. 即ち,

$$H(1, 2, 3) = \{ b \in B_3 \mid (1, 2, 3) \cdot b = (1, 2, 3) \}$$

とする.

定理 2.2. (1) $H(1, 2, 3)$ は $\sigma_1^3, \sigma_2^3, \sigma_1\sigma_2^3\sigma_1^{-1}, \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$ の 4 元で生成される.

(2) $\#(H(1, 2, 3) \setminus B_3) = 16$ で, 代表元は次で与えられる:

$$\begin{aligned} & \sigma_1, \sigma_1^2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2^2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^2, \\ & \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^2, \\ & \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^2, \\ & \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^2 \end{aligned}$$

実はこの定理はさらに拡張できる.

定理 2.3. $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in B_4^3 (\beta_1 \neq \beta_2, \beta_1 \neq \beta_3, \beta_2 \neq \beta_3)$ が次の関係を満たしているとする.

$$\beta_1\beta_2\beta_1 = \beta_2\beta_1\beta_2, \quad \beta_2\beta_3\beta_2 = \beta_3\beta_2\beta_3, \quad \beta_1\beta_3 = \beta_1\beta_3, \beta_1\beta_2 \neq \beta_2\beta_1, \quad \beta_2\beta_3 \neq \beta_3\beta_2.$$

このとき, $H(\beta_1\beta_2\beta_3)$ の基底の取り方, および $H(\beta_1\beta_2\beta_3) \setminus B_3$ の代表元は, 定理 2.2 で与えたものと一致する.

3 ブレイド状曲面への応用

以後の議論は, すべて PL-category で行うことにする.

D_1^2, D_2^2 を 2 次元円盤, $pr_i : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_i^2 (i = 1, 2)$ を標準的射影とする. また, Q_m を $int D_1^2$ 内の m 個の点の集合とする.

定義 3.1. 次数 m のブレイド状曲面 ([1] に詳しい) とは, $D_1^2 \times D_2^2$ に局所平坦に埋め込まれた向きづけ可能な 2 次元多様体 S で, 次の条件を満たすものをいう.

- (1) $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$ が単純分岐被覆である.
- (2) ∂S は $D_1^2 \times \partial D_2^2$ の中で, ある (1 次元の) m -ブレイドの閉包である.

基点 y_0 が指定された次数 m のブレイド状曲面とは, 次数 m のブレイド状曲面であり, $pr|_1(S \cap pr|_2^{-1}(y_0)) = Q_m$ が成り立つものをいう.

以下では次数 m のブレイド状曲面は, はじめに固定した Q_m のもとでの基点 y_0 が指定された次数 m のブレイド状曲面であるものとする.

次数 m のブレイド状曲面全体には, 次の 2 つの同値関係が定義される.

定義 3.2. S と S' を次数 m のブレイド状曲面とする.

(1) S と S' が isomorphic であるとは, 次の条件を満たす $D_1^2 \times D_2^2$ のアンビエントイソトピー $\{h_u\}_{u \in [0,1]}$ で, S を S' に写すものが存在するときをいう.

(i) 各 $u \in [0, 1]$ に対して, $pr_2 = pr_2 \circ h_u$.

(ii) 各 $u \in [0, 1]$ に対して, $h_u|_{pr_2^{-1}(y_0)} = id$.

(2) S と S' が equivalent であるとは, 次の条件を満たす $D_1^2 \times D_2^2$ のアンビエントイソトピー $\{h_u\}_{u \in [0,1]}$ で, S を S' に写すものが存在するときをいう.

(i) 各 $u \in [0, 1]$ に対して, $\bar{h}_u \circ pr_2 = pr_2 \circ h_u$ を満たす同相写像 $\bar{h}_u : D_2^2 \rightarrow D_2^2$ が存在する.

(ii) 各 $u \in [0, 1]$ に対して, $h_u|_{pr_2^{-1}(y_0)} = id$.

定義から, (1) \Rightarrow (2) がいえる.

次の命題はすでに知られている結果を組み合わせて得られるものである.

S を次数 m のブレイド状曲面とし, X_S を S と equivalent でかつ分岐点の位置が一致するような次数 m のブレイド状曲面全体の集合とする. また, $S \simeq S'$ と書いたら, S と S' が isomorphic であるとする.

命題 3.3. S を次数 m のブレイド状曲面とし, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ を S のある Hurwitz arc system A に付随するブレイドシステムとする. このとき, 全単射

$$\varphi: X_S / \simeq \rightarrow H(\beta_1, \dots, \beta_n) \setminus B_n, \quad \varphi([S']) = [\gamma_{S'}]$$

が存在する. ここで, $\gamma_{S'} \in B_n$ は, S' の A に付随するブレイドシステム $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ に対して,

$$(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot \gamma_{S'}$$

をみたす n -ブレイドである.

参考文献

- [1] S. Kamada, Braid and Knot Theory in Dimension Four, Math. Surveys and Monographs 95, A. M. S., 2002.

Homomorphisms of the knot quandle

coming from the first homology group of the infinite cyclic covering space

2008/02/14 Ayumu Inoue (Tokyo Institute of Technology)

1. Notations

$K \subset S^{n+2}$: an n -dim., smooth, connected, closed,
oriented manifold-knot ($n \geq 1$),
 $G(K)$: the knot group of K ,
 $\Lambda := \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$: the Laurent polynomial ring.

2. Definitions and Examples

Definition 1.1 (quandle)

Q : a set,
 $*$: $Q \times Q \rightarrow Q$ a binary operation,
 $(Q, *)$: a **quandle**
 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

Satisfying the following properties :

- (Q1) $\forall x \in Q, x * x = x.$
- (Q2) $\forall y \in Q, *y : Q \rightarrow Q (x \mapsto x * y)$ is bijective.
- (Q3) $\forall x, y, z \in Q, (x * y) * z = (x * z) * (y * z).$

Example 1.2 (conjugate quandle)

G : a group,
 $x * y := y^{-1}xy$ ($\forall x, y \in G$).
 $\text{Conj } G := (G, *)$: the **conjugate quandle** on G .

Remark

$X \subset G$: closed under conjugations,
 $\text{Conj } X := (X, *)$: the conjugate quandle on X .

Definition 1.3 (homomorphism)

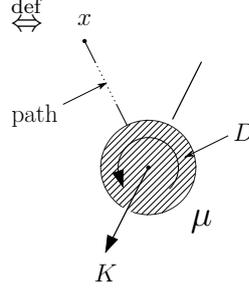
$(Q, *)$, $(Q', *')$: quandles,
 $\phi : Q \rightarrow Q'$ a **homomorphism**
 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
 $\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y)$ ($\forall x, y \in Q$).

Definition 1.4 (reduced knot quandle)

$G(K)_{\text{mer}} \subset G(K)$: the set of all meridians,
 $RQ(K) := \text{Conj } G(K)_{\text{mer}}$
: the **reduced knot quandle** of K .

Definition 1.5 (racket)

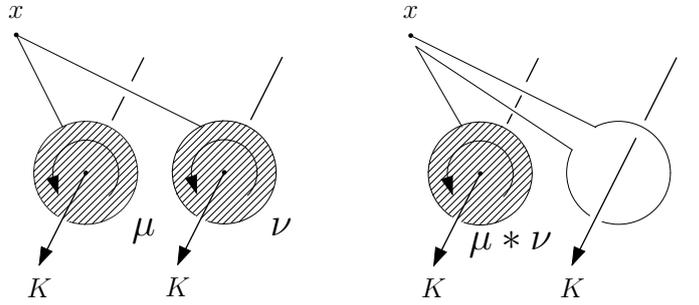
μ : a **racket** of K



- $x \in S^{n+2} \setminus K$: a fixed point.
- D : an embedding image of D^2 .
- $K \cap D = \{ \text{one point} \}$, transversally.
- ∂D : a meridian of K .
- The path connects x and ∂D in $S^{n+2} \setminus K$.

Definition 1.6 (knot quandle)

$Q(K) := \{ \mu : \text{a racket of } K \} / \text{homotopy},$
 $[\mu] * [\nu] := [\mu * \nu]$ ($\forall [\mu], [\nu] \in Q(K)$).
 $Q(K)$: the **knot quandle** of K .



Definition 2.1 (Alexander quandle)

$\Lambda_q := \Lambda \otimes \mathbb{Z}_q$ ($q \in \mathbb{N}$),
 $J \subset \Lambda_q$: an ideal,
 Λ_q/J : a quotient Λ -module,
 $x * y := tx + (1 - t)y$ ($\forall x, y \in \Lambda_q/J$).
 $(\Lambda_q/J, *)$: an **Alexander quandle**.

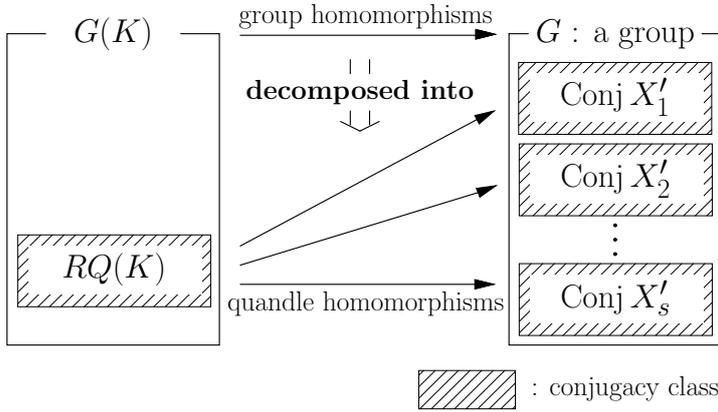
3. Motivations

Why do we consider the reduced knot quandle?

G : a group,

$X_i \subset G$: each conjugacy class ($1 \leq i \leq s$),

Homomorphisms from $G(K)$ to G can be decomposed into homomorphisms from $RQ(K)$ to each $\text{Conj } X_i$:



Why do we consider the knot quandle?

$(Q, *)$: a quandle,

D_K : a diagram of K ,

$\phi : Q(K) \rightarrow Q$ a homomorphism

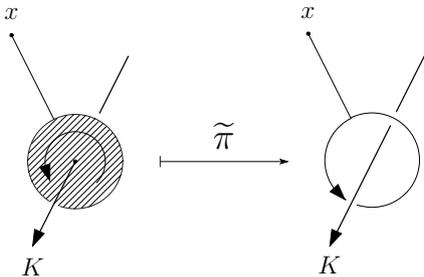
$\xleftrightarrow{1:1} c : D_K \rightarrow Q$ a coloring.

{ colorings } + “a cocycle of $(Q, *)$ ”

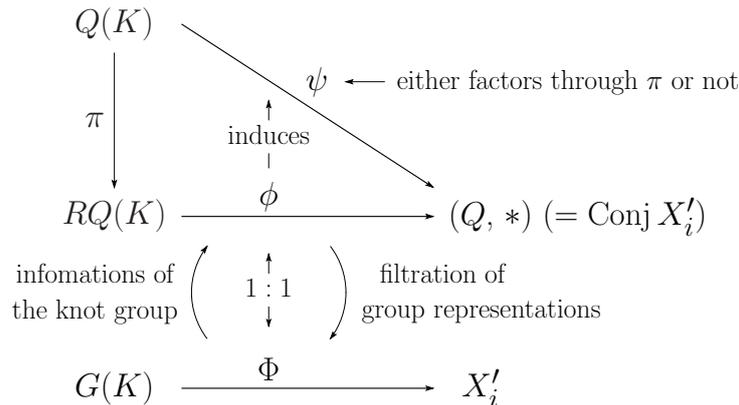
\rightsquigarrow “the cocycle invariant of K ”.

Relationship

$\tilde{\pi} : \{ \text{rackets} \} \rightarrow \{ \text{loops} \}$



$\rightsquigarrow \pi : Q(K) \rightarrow RQ(K)$ the quotient homomorphism.



4. Main result

$C_\infty(K)$: the infinite cyclic covering space of $S^{n+2} \setminus K$,

$\text{Hom}_\Lambda(\mathbb{H}_1(C_\infty(K)), \Lambda_q/J)$

$:= \{ \mathbb{H}_1(C_\infty(K)) \rightarrow \Lambda_q/J \text{ a } \Lambda\text{-homomorphism} \}$,

$\Delta_K^{(i)}(t)$: the i -th Alexander polynomial of K ($i \geq 0$),

$e_K^{(i)}(t) := \Delta_K^{(i)}(t)/\Delta_K^{(i+1)}(t)$.

Theorem 2.2

q : a natural number,

$\{ Q(K) \rightarrow (\Lambda_q/J, *) \text{ a homomorphism} \}$

$\cong \{ RQ(K) \rightarrow (\Lambda_q/J, *) \text{ a homomorphism} \}$

$\cong \Lambda_q/J \oplus \text{Hom}_\Lambda(\mathbb{H}_1(C_\infty(K)), \Lambda_q/J)$ as Λ -modules.

Corollary 2.3

q : a prime number,

$\{ Q(K) \rightarrow (\Lambda_q/J, *) \text{ a homomorphism} \}$

$\cong \{ RQ(K) \rightarrow (\Lambda_q/J, *) \text{ a homomorphism} \}$

$\cong \Lambda_q/J \oplus [\oplus_{i=0}^\infty (\Lambda_q/(e_K^{(i)}(t), J))]$ as Λ -modules.

Genus-two Heegaard splittings of non-simple 3-manifolds and 3-bridge presentations of 3-bridge links

Yeonhee JANG
Osaka University M2

1 Heegaard splittings

M : closed orientable 3-manifold
 $(V_1, V_2; F)$: genus g Heegaard splitting of M
 $\stackrel{def}{\iff}$ $\bullet V_1, V_2$: genus g handlebody
 $\bullet V_1 \cup V_2 = M$
 $\bullet V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2 = F$

Example 1.1 $\forall g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, S^3 admits a genus g Heegaard splitting.

Fact 1.1 (1) If M admits a genus g Heegaard splitting for $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, then M admits a genus $(g + 1)$ Heegaard splitting.

(2) Every closed orientable connected PL 3-manifold admits a Heegaard splitting of genus g for some $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

For a given M : closed ori. conn. PL 3-manifold, the genus of M , denoted by $g(M)$, is defined by

$$g(M) := \min\{g \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid M \text{ admits a genus } g \text{ Heegaard splitting}\}.$$

Fact 1.2 (1) $g(M) = 0 \iff M \cong S^3$.

(2) $g(M) = 1 \iff M \cong L(p, q)$ for some $p, q \in \mathbb{Z}$.

Moreover, they admit the unique minimal genus Heegaard splitting up to isotopy.

Question (1) Which manifolds have genus 2?

(2) How many Heegaard splittings of genus 2 do they admit up to isotopy / up to homeomorphism?

2 Isotopy classification of Heegaard splittings

M : compact ori. 3-mfd.

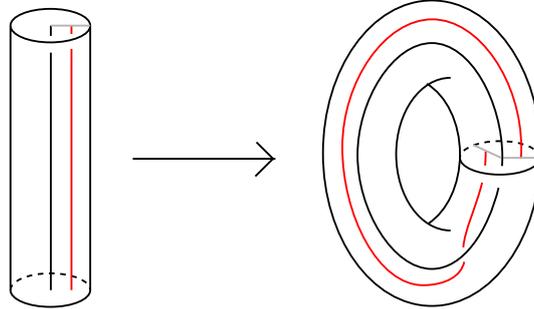
M : Seifert fibered space

$\stackrel{def}{\iff}$ (1) M : disjoint union of simple closed curves, called *fibers*,
(2) $\forall c \subset M$: simple closed curve,
 $\exists V$: regular nbd. of c s.t. V : disjoint union of simple closed curves.

Moreover, $V \cong V_{p,q}$ for some $p, q \in \mathbb{Z}$. Here,

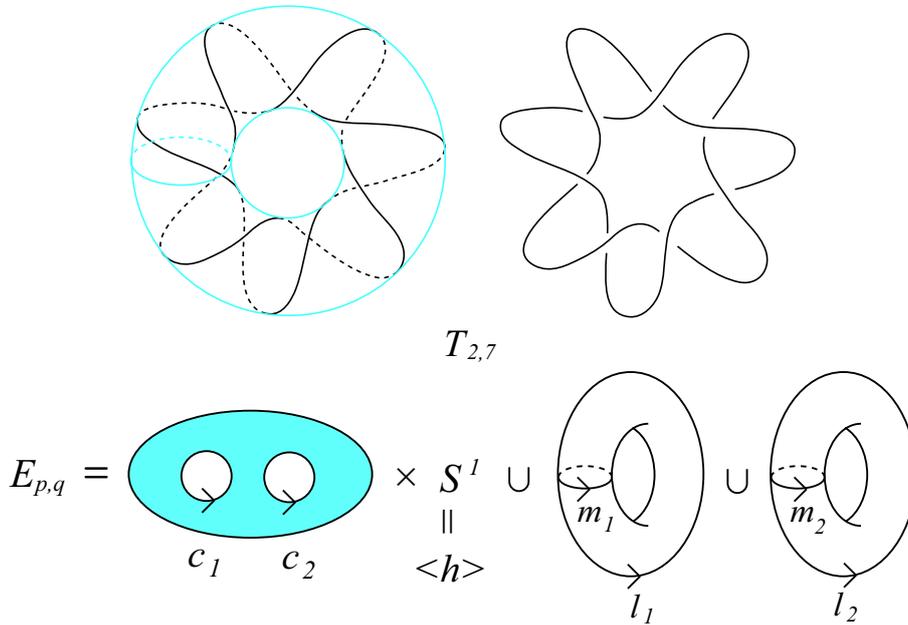
$$V_{p,q} := D^2 \times I / (x, 0) \sim (f(x), 1),$$

where $f : D^2 \rightarrow D^2$ is defined by $re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta + \frac{2\pi q}{p})}$.



A fiber h is called a *regular fiber* if $\exists N : \text{nbhd. of } h \text{ s.t. } N \cong V_{1,q}$ and a fiber h is called an *exceptional fiber* if $\exists N : \text{nbhd. of } h \text{ s.t. } N \cong V_{p,q}$ ($p > 1$),

Example 2.1 $E_{p,q} := S^3 \setminus \mathring{N}(T_{p,q}) = D(-r/p, s/q)$, where $ps - qr = 1$.



Proposition 2.1 The fundamental group of $E_{p,q}$ has a group presentation

$$\pi_1(E_{p,q}) = \langle c_1, c_2, h \mid c_1^p h^{-r}, c_2^q h^s, [c_1, h], [c_2, h] \rangle.$$

Theorem 2.2 (Morimoto, '89)

M_1, M_2 : Seifert fibered spaces over a disk with 2 exceptional fibers

$f : \partial M_2 \rightarrow \partial M_1$: homeomorphism

If $M := M_1 \cup_f M_2$ has genus two, then it admits at most 4 Heegaard splittings up to isotopy.

In the following table, μ is an "upper bound", given by Morimoto, of isotopy classes of Heegaard splittings of $M = M_1 \cup_f M_2$ for each case. For details of cases and classes of Heegaard surfaces, F(1), ..., F(3-2), see Appendix A.

Cases	F(1)	F(2-1)	F(2-2)	F(3-1)	F(3-2)	μ	ν
Case(1-a-1)	1	-	-	-	-	1	1
Case(1-a-2)	2	-	-	-	-	2	2
Case(2-a-1)	1	1	-	-	-	2	2
Case(2-a-2)	2	1	-	-	-	3	3
Case(2-b-1)	1	-	-	-	-	1	1
Case(2-b-2)	2	-	-	-	-	2	2
Case(3-a-1)	1	1	-	-	-	2	2
Case(3-a-2)	2	1	-	-	-	3	3
Case(3-b-1)	1	-	-	1	-	2	2
Case(3-b-2)	-	-	-	1	-	1	1
Case(3-c-1)	1	-	-	-	-	1	1
Case(3-c-2)	2	-	-	-	-	2	2
Case(4-a-1)	1	1	1	-	-	3	2
Case(4-a-2)	2	1	1	-	-	4	3
Case(4-b-1)	1	-	1	-	-	2	2
Case(4-b-2)	2	-	1	-	-	3	3
Case(4-c-1)	1	1	-	-	-	2	2
Case(4-c-2)	2	1	-	-	-	3	3
Case(4-d-1)	1	-	-	-	-	1	1
Case(4-d-2)	2	-	-	-	-	2	2

Table 1 : classification of Heegaard splittings

Theorem 2.3 *Any two Heegaard splittings in Table 1 are not isotopic.*

To prove this theorem, we need the following lemma.

Lemma 2.4 (Boileau-Collins-Zieschang, '91)

M : closed conn. ori. 3-mfd.

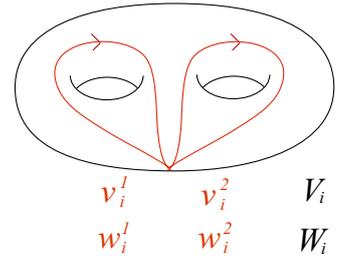
$(V_1, V_2; F), (W_1, W_2; G)$: genus-two Heegaard splittings of M

$\{v_i^1, v_i^2\}, \{w_i^1, w_i^2\}$: generating systems for $\pi_1(M)$

determined by generating systems for $\pi_1(V_i), \pi_1(W_i)$

If $(V_1, V_2; F)$ and $(W_1, W_2; G)$ are isotopic,

then $[v_1^1, v_1^2] \sim [w_1^1, w_1^2]^{\pm 1}$ and $[v_2^1, v_2^2] \sim [w_2^1, w_2^2]^{\pm 1}$.



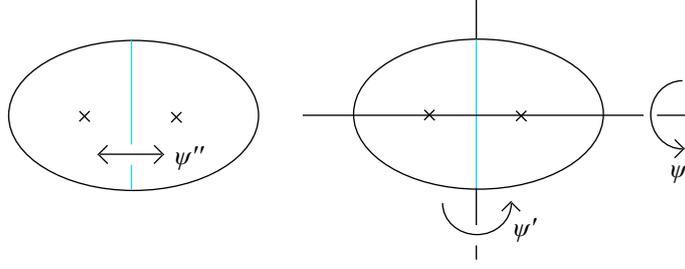


Figure 1:

3 Homeomorphism classification of Heegaard splittings

We can also obtain the homeomorphism classification of Heegaard splittings of M by considering the action of the mapping class group of M on Heegaard surfaces.

$Diff(M)$: the group of diffeomorphisms of a connected 3-manifold M

$Diff_0(M)$: the subgroup of $Diff(M)$ consisting of diffeomorphisms which are ambient isotopic to the identity map

$MCG(M) := Diff(M)/Diff_0(M)$: the *mapping class group* of M

Lemma 3.1 *Let $M = D(\beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2)$, where $0 < \beta_i < \alpha_i$ for $i = 1, 2$. Then*

- (1) $MCG(M) \cong MCG^+(M)$ if $\beta_2/\alpha_2 \neq (\alpha_1 - \beta_1)/\alpha_1$,
- (2) $MCG(M) \cong \langle MCG^+(M), \psi'' \rangle$ if $\beta_2/\alpha_2 = (\alpha_1 - \beta_1)/\alpha_1$,

where ψ'' is orientation-reversing and preserves the saturated annulus (see Figure 1). Here, $MCG^+(M)$ is the subgroup of $MCG(M)$ consisting of all orientation-preserving homeomorphisms, and we have

- (i) $MCG^+(M) = \langle \psi \mid \psi^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ when $\beta_1/\alpha_1 \neq \beta_2/\alpha_2$,
- (ii) $MCG^+(M) = \langle \psi, \psi' \mid \psi^2 = 1, \psi'^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ when $\beta_1/\alpha_1 = \beta_2/\alpha_2$,

where ψ and ψ' are as in Figure 1.

From this lemma, we obtain the following theorem.

Theorem 3.2 (1) *If $M_1 \cong M_2$, then the number of homeomorphism classes of Heegaard splittings of M is given by μ in Table 1.*

(2) *If $M_1 \not\cong M_2$, then the number of homeomorphism classes of Heegaard splittings of M is given by ν in Table 1.*

4 3-bridge presentations of 3-bridge links

A link L in S^3 admits an n -bridge presentation

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists S^2$ embedded in S^3 s.t.

- S^2 meets L transversally in $2n$ points
- S^2 divides S^3 in two balls B_i , ($i = 1, 2$), such that $L \cap B_i = (n$ arcs trivially embedded in $B_i)$

M^n, N^n : compact manifolds

$A^{n-2} \subset M, B^{n-2} \subset N$: proper submanifolds

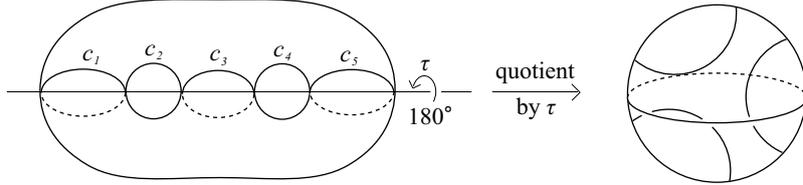
A continuous function $f : M \rightarrow N$ is a *branched covering with branch sets A (upstairs) and B (downstairs)*

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

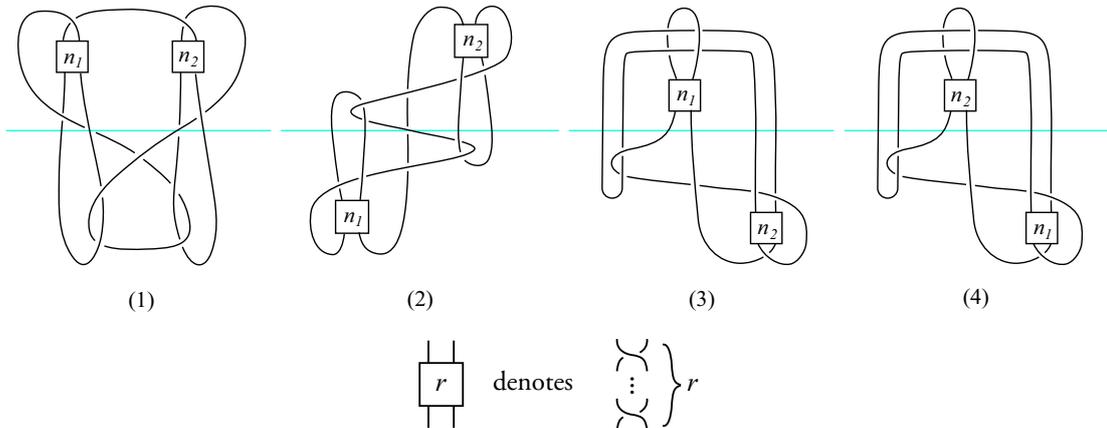
- (1) components of preimages of open sets of N are a base for the topology of M ,
- (2) $f(A) = B$, $f(M - A) = N - B$, and $N - B$ is exactly the set of points in N which are evenly covered, i.e. have neighbourhoods U such that f sends each component of $f^{-1}(U)$ homeomorphically onto U .

We call M a *branched covering of N branched over B* .

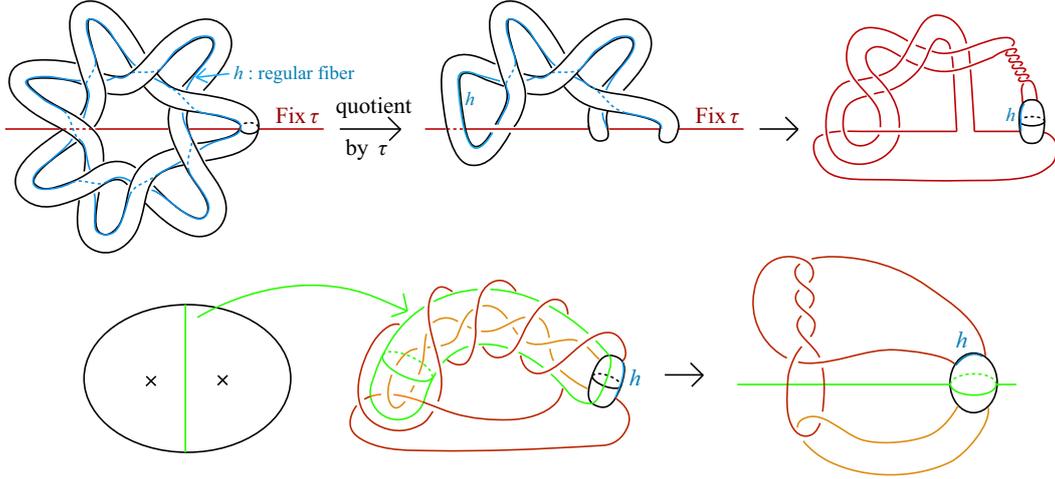
Fact 4.1 *A closed orientable connected 3-manifolds M admits a Heegaard splitting of genus two if and only if M is a 2-fold branched covering of S^3 branched over a link with a 3-bridge presentation.*



Corollary 4.2 *The following 3-bridge presentations of a knot K are corresponding to Heegaard splittings in Case (4-a-2) of Table 1, and hence they are mutually non-isotopic.*



To obtain the above 3-bridge presentations from the Heegaard splittings, we use the Montesinos trick. For example,



5 Generalization to other non-simple 3-manifolds

The methods used to prove the above theorems and corollary enables us to classify Heegaard splittings of some non-simple 3-manifolds and to obtain 3-bridge links with infinitely many 3-bridge presentations.

We give two examples here.

Theorem 5.1 Put $M_1 = D^2(\beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2)$ and $M_2 = S^3 \setminus \mathring{N}(S(\alpha, \beta))$, where $S(\alpha, \beta)$ is a hyperbolic 2-bridge knot. Let $M = M_1 \cup_f M_2$, where the regular fiber of M_1 is identified with the meridian loop of M_2 by f . Then

(1) any Heegaard surface of M is isotopic to the surface obtained from one of the following surfaces, F_1, \dots, F_{12} by applying Dehn twists D_l along the attaching torus in the direction of a longitude l of the 2-bridge knot.

F_1 is the union of A in M_1 and S_{τ_1, ρ_2} in M_2 ,

F_2 is the union of A in M_1 and S_{τ_1, ρ'_2} in M_2 ,

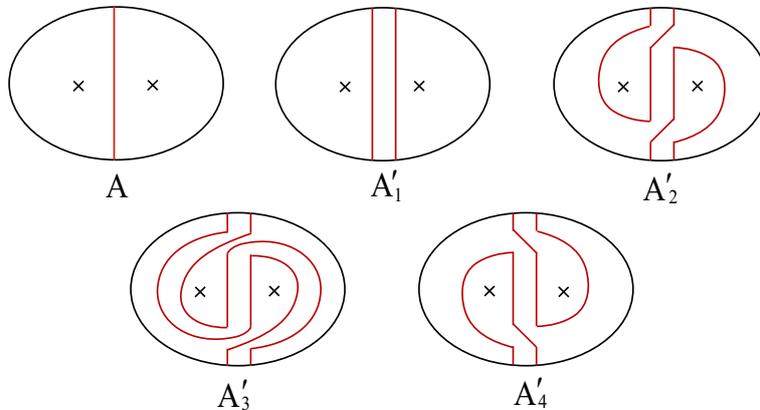


Figure 2: A, A'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) in base orbifold

F_3 is the union of A in M_1 and S_{τ_2, ρ_1} in M_2 ,
 F_4 is the union of A in M_1 and S_{τ_2, ρ'_1} in M_2 ,
 F_5 is the union of A in M_1 and S_{ρ_2, τ_1} in M_2 ,
 F_6 is the union of A in M_1 and $S_{\rho'_2, \tau_1}$ in M_2 ,
 F_7 is the union of A in M_1 and S_{ρ_1, τ_2} in M_2 ,
 F_8 is the union of A in M_1 and $S_{\rho'_1, \tau_2}$ in M_2 ,
 F_9 is the union of A'_1 in M_1 and the two-bridge sphere of M_2 ,
 F_{10} is the union of A'_2 in M_1 and the two-bridge sphere of M_2 ,
 F_{11} is the union of A'_3 in M_1 and the two-bridge sphere of M_2 ,
 F_{12} is the union of A'_4 in M_1 and the two-bridge sphere of M_2 ,
 where S_{τ, τ^*} is the twice-punctured torus in M_2 associated with (τ, τ^*) and A, A'_i
 ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) is in as Figure 2.

(2) The following tables give the complete classification of the Heegaard surfaces in (1) up to isotopy and up to homeomorphism.

		F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
$\alpha = 5$		○		○		○		○		○	○	○	○
$\alpha \geq 7$	$\beta \equiv \pm 2 \pmod{\alpha}$	○		○	○	○		○	○	○	○	○	○
	$\beta \equiv \pm 2^{-1} \pmod{\alpha}$	○	○	○		○	○	○		○	○	○	○
	otherwise	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

Table 2: isotopy classification

	$F_1 \cong F_2 \cong F_3 \cong F_4$	$F_5 \cong F_6 \cong F_7 \cong F_8$	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
$\alpha = 5$	1		1	1	1	1
$\alpha \geq 7$	1	1	1	1	1	1

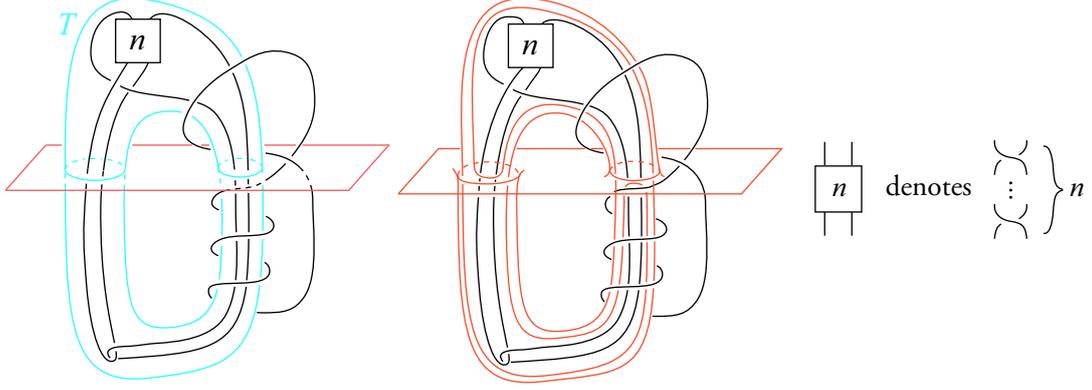
Table 3-1: homeomorphism classification when $\beta^2 \equiv \pm 1 \pmod{\alpha}$

	$F_1 \cong F_2$	$F_5 \cong F_6$	$F_3 \cong F_4$	$F_7 \cong F_8$	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
$\beta \equiv \pm 2 \pmod{\alpha}$	1		1	1	1	1	1	1
$\beta \equiv \pm 2^{-1} \pmod{\alpha}$	1	1	1		1	1	1	1
otherwise	1	1	1	1	1	1	1	1

Table 3-2: homeomorphism classification when $\beta^2 \not\equiv \pm 1 \pmod{\alpha}$

Theorem 5.2 *There exist infinitely many 3-bridge links each of which admits infinitely many 3-bridge presentations.*

For example,



A Details for Table 1

Let M be a compact, connected, orientable Seifert fibered space with r exceptional fibers and let B be the base orbifold of M with genus g and p boundary components. Let $p : M \rightarrow B$ be the projection map. The symbol s_i ($i = 1, 2, \dots, r$) denotes an exceptional fiber of type (λ_i, μ_i) and V_i denotes a fibered neighbourhood of s_i . If $\partial M \neq \emptyset$, then set $M' = \text{Cl}(M - (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r))$. If M is closed, $M' = \text{Cl}(M - (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r) \cup N(s_0))$, where s_0 is a regular fiber. Set $B' = p(M')$, then M' is homeomorphic to $B' \times S^1$. We fix the homeomorphism.

Assume $\partial B \neq \emptyset$. We denote by T_i the component of $\partial M'$ which is identified with ∂V_i . Since $p' : M' \rightarrow B'$ is an S^1 -bundle over B' , it has a cross section $c : B' \rightarrow M'$. Let $c_i = c(B') \cap T_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) then c_i is an essential simple closed curve on T_i . And let $h_i \subset T_i$ be a fiber of M' then h_i is also an essential simple closed curve on T_i and meet c_i at one point.

If $M_i = KI$ (an orientable twisted I -bundle over a Klein bottle), then by u_i we denote a fiber in ∂M_i as a circle bundle over a Möbius band ($i = 1, 2$). Then u_i is the boundary loop of a cross section of M_i ($i = 1, 2$). If $M_i = E_{2,n}$, then by m_i we denote a meridian loop in $\partial E_{2,n}$ ($i = 1, 2$). Note that m_i is the boundary loop of a cross section of $M'_i = \text{Cl}(M - (V_1 \cup \dots \cup V_r))$ ($i = 1, 2$), where V_i is a fibered neighbourhood of each exceptional fiber.

Then the cases and classes of Heegaard surfaces for Table 1 are given as follows:

Cases

Case (1): $M_1 \neq E_{2,\alpha}$ and $M_2 \neq E_{2,\beta}$.

Case (1-a): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ with $ad - \varepsilon c = \pm 1$ and $\varepsilon = \pm 1$.

Case (1-a-1): $M_1 = D(\pm 1/p, \pm 1/q)$ w.r.t. h_1 and c_1 and $a = 0$, or $M_2 = D(\pm 1/p, \pm 1/q)$ w.r.t. h_2 and c_2 and $d = 0$.

Case (1-a-2): M does not belong to Case (1-a-1).

Case (2): $M_1 = E_{2,\alpha}$ and $M_2 \neq KI$ nor $E_{2,\beta}$.

Case (2-a): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \delta & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $\varepsilon \delta = \pm 1$.

Case (2-a-1): $\alpha = 3$, or $M_2 = D(\pm 1/p, \pm 1/q)$ w.r.t. h_2 and c_2 and $d = 0$.

Case (2-a-2): M does not belong to Case (2-a-1).

Case (2-b): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $ad - \varepsilon c = \pm 1$ and $\varepsilon = \pm 1$ and $a \neq 0$.

Case (2-b-1): $\alpha = 3$ and $\varepsilon a = -1$, or $M_2 = D(\pm 1/p, \pm 1/q)$ w.r.t. h_2 and c_2 and $d = 0$.

Case (2-b-2): M does not belong to Case (2-b-1).

Case (2'): $M_1 \neq KI$ nor $E_{2,\alpha}$ and $M_2 = E_{2,\beta}$. This case can be substituted for Case (2).

Case (3): $M_1 = E_{2,\alpha}$ and $M_2 = KI$.

Case (3-a): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \delta & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $\varepsilon\delta = \pm 1$.

Case (3-a-1): $\alpha = 3$ or $d = \pm 1$ or 0 .

Case (3-a-2): $\alpha > 3$ and $|d| > 1$.

Case (3-b): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $\varepsilon\delta = \pm 1$.

Case (3-b-1): $b = \pm 1$.

Case (3-b-2): $b \neq \pm 1$.

Case (3-c): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $ad - \varepsilon c = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ and $ac \neq 0$.

Case (3-c-1): $\alpha = 3$ and $\varepsilon a = -1$, or $d = \pm 1$ or 0 .

Case (3-c-2): M does not belong to Case (3-c-1).

Case (3'): $M_1 = KI$ and $M_2 = E_{2,\beta}$. This case can be substituted for Case (3).

Case (4): $M_1 = E_{2,\alpha}$ and $M_2 = E_{2,\beta}$.

Case (4-a): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(m_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $\varepsilon\delta = \pm 1$.

Case (4-a-1): $\alpha = 3$ or $\beta = 3$.

Case (4-a-2): $\alpha > 3$ and $\beta > 3$.

Case (4-b): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(m_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $\varepsilon\delta = \pm 1$ and $a \neq 0$.

Case (4-b-1): $\alpha = 3$ and $\varepsilon a = -1$.

Case (4-b-2): $\alpha > 3$ or $\varepsilon a \neq -1$.

Case (4-c): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(m_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \delta & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $\varepsilon\delta = \pm 1$ and $d \neq 0$.

Case (4-c-1): $\beta = 3$ and $\varepsilon d = -1$.

Case (4-c-2): $\beta > 3$ or $\varepsilon d \neq -1$.

Case (4-d): $\begin{bmatrix} f(h_2) \\ f(m_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ \delta & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ with $ad - \varepsilon c = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ and $ad \neq 0$.

$ad \neq 0$.

Case (4-d-1): $\alpha = 3$ and $\varepsilon a = -1$ or $\beta = 3$ and $\varepsilon d = -1$.

Case (4-d-2): M does not belong to Case (4-d-1).

In other cases, M admits no Heegaard splittings of genus two.

Classes of Heegaard surfaces

$F(1-1)$:= $\{F : \text{Heegaard surface of } M \mid$
 $F \cap M_1 : 6\text{-times punctured torus giving 1-bridge presentation of } M_1$
 $\text{w.r.t. } f(h_2),$
 $F \cap M_2 : \text{essential annulus saturated in the Seifert fibration of } M_2\}$

$F(1-2)$:= $\{F : \text{Heegaard surface of } M \mid$
 $F \cap M_1 : \text{essential annulus saturated in the Seifert fibration of } M_1,$
 $F \cap M_2 : 6\text{-times punctured torus giving 1-bridge presentation of } M_2$
 $\text{w.r.t. } f(h_2)\}$

$F(1)$ is the union of $F(1-1)$ and $F(1-2)$.

$F(2-1)$:= $\{F : \text{Heegaard surface of } M \mid$
 $F \cap M_1 : 2\text{-bridge sphere of } M_1,$
 $F \cap M_2 : \text{two disjoint essential annuli in } M_2\}$

$F(2-2)$:= $\{F : \text{Heegaard surface of } M \mid$
 $F \cap M_1 : \text{two disjoint essential annuli in } M_1,$
 $F \cap M_2 : 2\text{-bridge sphere of } M_2\}$

$F(3-1)$:= $\{F : \text{Heegaard surface of } M \mid$
 $F \cap M_1 : 2\text{-bridge sphere of } M_1,$
 $F \cap M_2 : \text{two disjoint essential annuli saturated in the fibration of } M_2$
 $\text{as a circle bundle over a Möbius band } \}$

$F(3-2)$:= $\{F : \text{Heegaard surface of } M \mid$
 $F \cap M_1 : \text{two disjoint essential annuli saturated in the fibration of } M_1$
 $\text{as a circle bundle over a Möbius band } ,$
 $F \cap M_2 : 2\text{-bridge sphere of } M_2\}$

RATIONAL TANGLE SURGERY AND DEHN SURGERY ON KNOTS IN LENS SPACES

KAI ISHIHARA AND KOYA SHIMOKAWA

ABSTRACT. In this paper we will characterize rational tangle surgeries on 2-bridge knot $b(2m, 2n)$ yielding a $(2, 2k)$ -torus link. As an application, we will characterize particular lens space surgeries on knots in lens spaces with good symmetry.

1. INTRODUCTION

In this paper we will characterize rational tangle surgery on a 2-bridge knot $b(2m, 2n)$ yielding a $(2, 2k)$ -torus link. This class contains rational tangle surgeries from twist knots to $(2, 2k)$ -torus links. Rational tangle surgeries play an important role in the study of topological characterization of site-specific recombinations of DNA [ES] [Su]. Our theorem has a application for study of Xer recombinations.

Let T , T_1 , and T_2 be 2-string tangles. The knot (or link) obtained by connecting two endpoints on the top each other and two endpoint on the bottom each other by simple curves, as is shown in Figure 1, is called the *numerator* and is denoted by $N(T)$. From two tangles T_1 and T_2 , a tangle can be obtain by connecting two endpoints of T_1 to two endpoints of T_2 as is shown in Figure 2, is called the *sum* of T_1 and T_2 , and is denoted by $N(T_1 + T_2)$. For definitions of the numerator and the sum of two tangles, see [Mu1]. Let c_1, \dots, c_n be a sequence of integers. The circle product of a tangle T and (c_1, \dots, c_n) is defined as is shown in Figure3, and is denoted by $T \circ (c_1, \dots, c_n)$, see [D1]. Let P and R be rational tangles. A operation which transform a knot (or link) by replacing P with R is called a *rational tangle surgery*, see Figure 4.

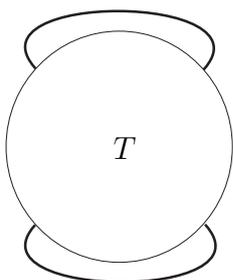


FIGURE 1. $N(T)$

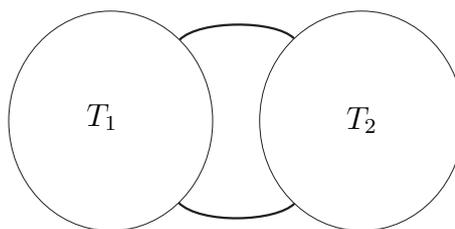


FIGURE 2. $T_1 + T_2$

We obtain the following theorem by Theorem 2.3 (see Section 2).

Theorem 1.1. *Suppose $N(U + \frac{0}{1}) = N(\frac{4mn-1}{2m})$ and $N(U + \frac{1}{w}) = N(\frac{2k}{1})$, where $m, n \neq 0$ and $k \neq \pm 2$. Then one of the following holds.*

- (1) $k = m$ and $U = \frac{4mn-1}{-w(4mn-1)+2m}$.

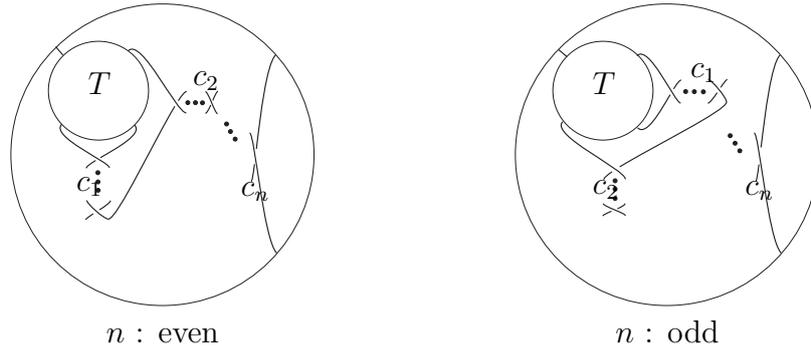
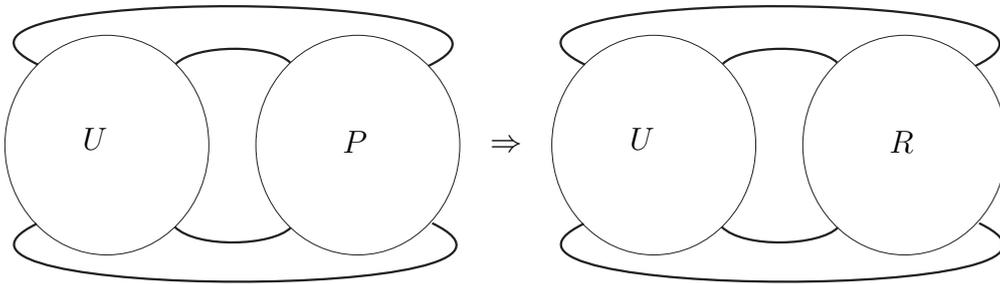
FIGURE 3. $T \circ (c_1, \dots, c_n)$ 

FIGURE 4. Rational tangle surgery

- (2) $k = n$ and $U = \frac{4mn-1}{-w(4mn-1)+2n}$.
(3) $k = n + m + 1$ and $U = \left(\frac{-1}{2m+1} + \frac{-1}{2n+1}\right) \circ (1, -(w-1), 0)$.
(4) $k = n + m - 1$ and $U = \left(\frac{-1}{2m-1} + \frac{-1}{2n-1}\right) \circ (1, -(w-1), 0)$.

It is known that a recombination system Xer can act on a DNA catenane whose link type is a $(2, 2k)$ -torus link ($k \geq 3$) and yield a DNA knot with $2k + 1$ crossings [BSC] [D2]. If we assume that the obtained knot is a twist knot with $2k + 1$ crossings, we can characterize the action of Xer recombination by using the tangle model.

Corollary 1.2. *Suppose $N(U + \frac{0}{1}) = N(\frac{4k+1}{2})$ and $N(U + \frac{1}{w}) = N(\frac{2k}{1})$, where $k \geq 3$. Then $U = \frac{4k-1}{-w(4k-1)+2k}$.*

Next we characterize knots with good symmetry in a lens space $L(4mn - 1, 2m)$ which have Dehn surgeries yielding another lens space $L(2k, 1)$. Orientation preserving involutions with fixed points on lens space $L(p, q)$ is characterized in [HR]. It is classified into three types (A), (B) and (C) in [WZ]. In this paper we consider the following involution. Let $L(p, q) = V_1 \cup V_2$ be a genus one Heegaard splitting.

- (A) Both V_1 and V_2 are invariant under the involution, however the orientation of the core of V_1 and V_2 is reversed. The orbit space is S^3 .

This involution is called type (A). Let K be a knot in a lens space. Then K is called a *strongly invertible knot of type (A)* if K is invariant as a set under the involution of type (A) and K meets the fixed point set in two points.

A knot in a lens space is called a *core knot* if it is isotopic to a core of a solid torus of a genus one Heegaard splitting and *torus knot* if it is not a core knot and isotopic to an essential curve on a Heegaard splitting torus.

Theorem 1.3. *Let K be a strongly invertible knot of type (A) in a lens space $L(4mn - 1, 2m)$. Suppose a Dehn surgery on K yields a lens space $L(2k, 1)$, where $k \neq \pm 2$. Then K is a core knot or a torus knot.*

2. BANDING AND 2-BRIDGE KNOTS AND LINKS

Since we consider the case where $P = (\frac{0}{1})$ and $R = (\frac{1}{w})$, this tangle surgery can be considered as a band surgery. In this section we will characterize band surgeries on a 2-bridge knot $b(2m, 2n)$ yielding $b(2k, 1)$, where m and n are non-zero integers and k is an integer other than ± 2 .

Let L be a link in S^3 . Let $b : I \times I \rightarrow S^3$ be a band satisfying $b^{-1}(L) = I \times \partial I$, where $I = [0, 1]$ is an interval. Let L_b denote a link obtained by replacing $b(I \times \partial I)$ in L with $b(\partial I \times I)$. We call L_b a *banding* of L and say L_b is obtained from L by a *band surgery* along b . For simplicity we denote $b(I \times I)$ by b .

When $m = 0$ or $n = 0$, $b(2m, 2n)$ is a trivial knot, and a characterization of band surgeries from the trivial knot to a $(2, 2k)$ -torus link is obtained in [HS]. Hence we may assume that $m, n \neq 0$. By adding one more assumption that $k \neq \pm 2$, we obtain the following theorem.

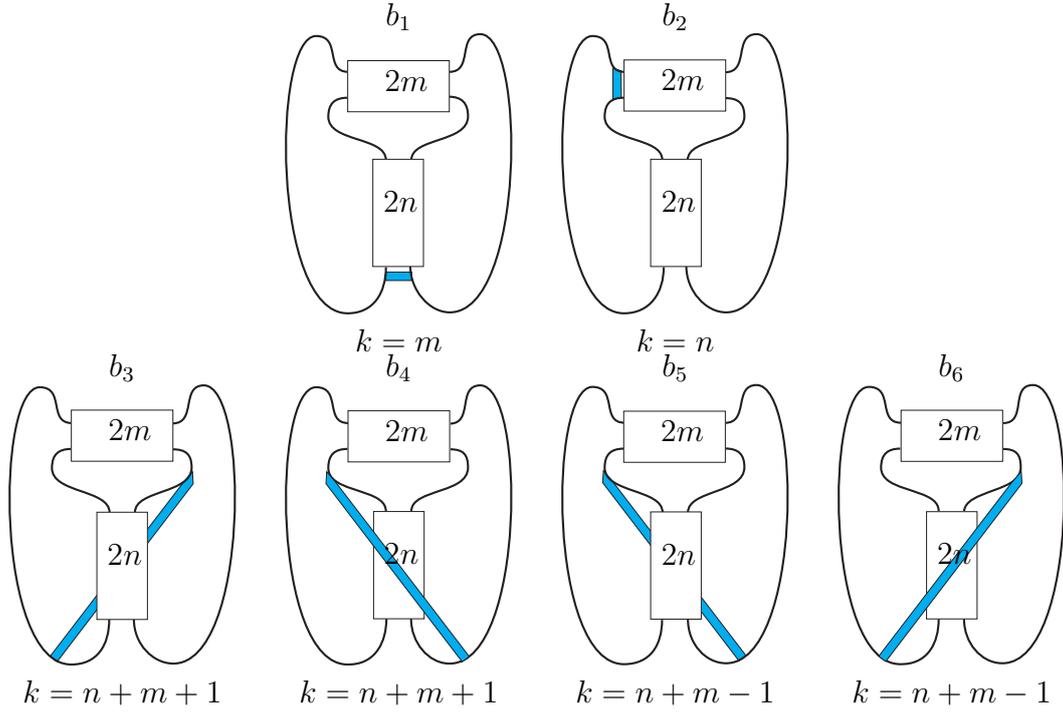
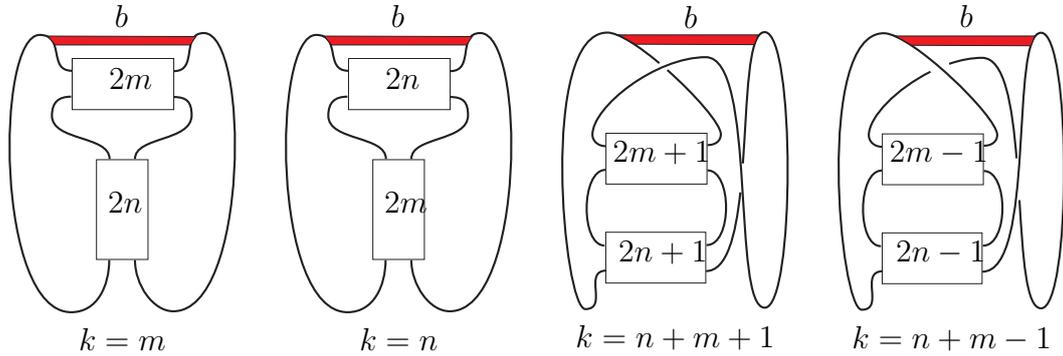
Theorem 2.1. *Let L be a 2-bridge knot $b(2m, 2n)$ in S^3 . Suppose, for a band b , L_b is a 2-bridge link $b(2k, 1)$, where $m, n \neq 0$ and $k \neq \pm 2$. Then a band b is isotopic to one of the six bands b_1, \dots, b_6 in Figure 5.*

Remark 2.2. *When $n = 1$, i.e. L is a twist knot, b_5, b_6 and b_1 are isotopic to each other. Hence a band b is isotopic to one of 4 bands b_1, b_2, b_3, b_4 . When $n = -1$, similarly, a band b is isotopic to one of 4 bands b_1, b_2, b_5, b_6 . In particular, when $m = \pm 1$ the following holds.*

- (1) *When $m = 1, n = 1$, i.e. L is a trefoil knot, b_1 and b_2, b_3 and b_4 are isotopic to each other respectively. Hence any band b is isotopic to one of 2 bands b_1 and b_3 . When $m = -1, n = -1$, a band b is isotopic to one of 2 bands b_1 and b_5 .*
- (2) *When $m = 1, n = -1$, i.e. L is a figure eight knot, all bands $b_1, b_2, b_5,$ and b_6 are isotopic to each other. Hence a band b is isotopic to a band b_1 . When $m = -1, n = 1$, any band b is isotopic to a band b_1 .*

In Theorem 2.1, up to isotopy without fixing L , b_3 and b_4 , and b_5 and b_6 are isotopic to each other respectively. Then we obtain the following theorem.

Theorem 2.3. *Let L be a 2-bridge knot $b(2m, 2n)$ in S^3 . Suppose, for a band b , L_b is a 2-bridge link $b(2k, 1)$, where $m, n \neq 0$ and $k \neq \pm 2$. Then a pair of a knot L and a band b (L, b) is isotopic to one of 4 in Figure 6.*

FIGURE 5. Characterization up to isotopy with fixing L FIGURE 6. Characterization up to isotopy without fixing L

3. PROOF OF THEOREM 2.1

If L and L_b have orientations which agree with each other except for the band b , corresponding banding is called a *coherent banding*. For a coherent banding, the following theorem is known.

Theorem 3.1. ([Mu2, Lemma 7.1]) $|\sigma(L) - \sigma(L_b)| \leq 1$

We consider the case where L is a 2-bridge knot $b(2m, 2n)$ and L_b is $b(2k, 1)$. Since it is a banding from a knot to a 2-component link, we can assume that it is a coherent banding by giving proper orientations for L and L_b . There are two ways to give an orientation for L_b as is shown in Figure 7. Since $|\sigma(L)| = 0$ or 2 , $|\sigma(L_1)| = 1$, and $|\sigma(L_2)| = 2|k| - 1$,

when $|k| > 2$, L_b is L_1 . When $|k| \leq 1$, since L_b is a trivial link or a Hopf link, we can assume that L_b is L_1 .

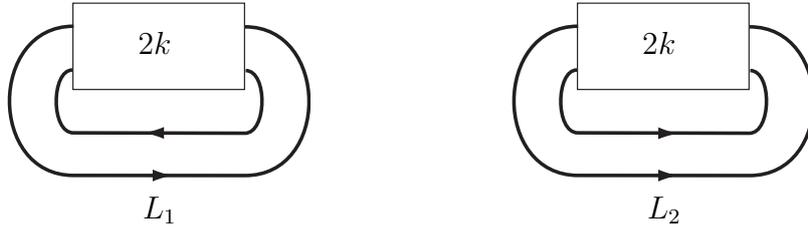


FIGURE 7. Orientation of L_b

Theorem 3.2 ([HS]). *Suppose that b is a band of a coherent banding from L to L_b . Then $\chi(L) \leq \chi(L_b) - 1$ if and only if L has a minimal genus Seifert surface containing b .*

In our case $\chi(L) = -1$ and $\chi(L_b) = 0$ or 2 . L is a genus one knot and genus one Seifert surfaces of L are characterized in [HT], and there is only two Seifert surfaces of L as is shown in Figure 8. F_1 and F_2 in Figure 8 are genus one Seifert surfaces of L which is obtained by plumbing of two annuli with m and n full twists. Moreover, by [K] it is known that F_1 is isotopic to F_2 with fixing L if and only if $m = \pm 1$ or $n = \pm 1$. Let F be a minimal Seifert surface of L which contains b . Then since F_1 is isotopic to F_2 without fixing L , we may assume that $F = F_1$.

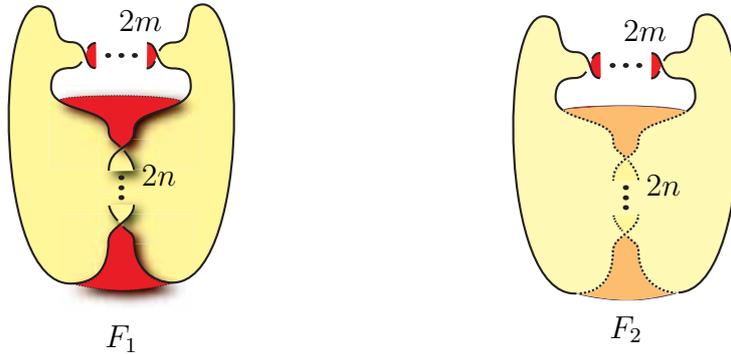
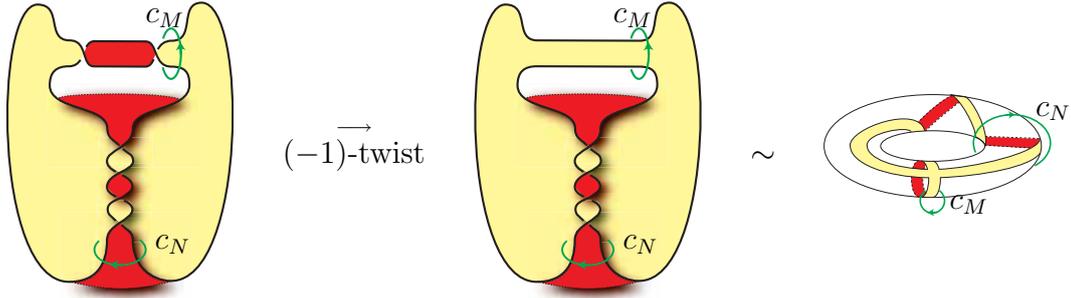


FIGURE 8. Minimal Seifert surface of L

We will give a parameterization of band attached to L which is contained in F . If b is contained in F , then $\text{Cl}(F - b)$ is an annulus in S^3 . Let γ_b denote the core of the annulus. Then γ_b is a knot in F . Note that an isotopy class of a band b on F is determined by a unoriented knot γ_b on F .

First we will give a parameterization of a particular class of oriented knots in F . Let c_M and c_N be oriented trivial knots in S^3 which is disjoint from F . See Figure 9. For parameterization, we give an orientation of γ_b . Let $p = lk(\gamma_b, c_M)$ and $q = lk(\gamma_b, c_N)$. Then γ_b is parameterized by $\pm(p, q)$.

Now we consider $(-m)$ -twist along c_M . Then after the twist F lie on standard torus in S^3 as is shown in 9. Hence γ_b become a torus knot after the twist. Motegi [Mo] characterized twists which yield a torus knot from a trivial knot.

FIGURE 9. (-1) -twist along c_M

Theorem 3.3. ([Mo, Theorem 3.8.]) *If a knot K_n which is obtained from a trivial knot K by n -twist along a trivial knot c is a torus knot, then except for trivial examples $n = \pm 1$.*

Trivial examples are shown in Figure 10.

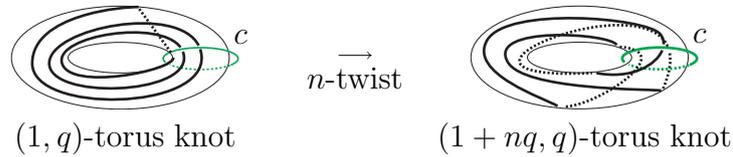


FIGURE 10. Trivial examples

By using Theorem 3.3 for $c = c_M$ and $K = \gamma_b$, we obtain the following. If γ_b is a trivial knot, then one of the followings holds.

- (1) $|p|, |q| \leq 1, (p, q) = \pm(1, 0)$ or $\pm(0, 1)$ or $\pm(1, 1)$ or $\pm(1, -1)$.
- (2) $n = 1$ and $(p, q) = \pm(2, -1)$.
- (3) $n = -1$ and $(p, q) = \pm(2, 1)$.
- (4) $m = \pm 1$.

Remark 3.4. *When (1), for any m and n , γ_b is a trivial knot. When (2) or (3), for any n , γ_b is a trivial knot.*

By considering also the case that $F = F_2$, we obtain Theorem 2.1 for $|m|, |n| > 1$. When $|m| > 1$ and $|n| = 1$, F_2 is isotopic to F_1 with fixing L . Hence by this isotopy, there exist four solutions as Remark 2.2.

For the remaining case, $|m| = |n| = 1$, using braid presentations of γ_b , we can decide if γ_b is trivial or not. For that, we using following well known lemma.

Lemma 3.5. *If a trivial knot has a positive n -braid presentation with m -crossing, then $m = n - 1$.*

Now it is enough to consider the case of $p > q > 0$, by the symmetries of γ_b 's. Then we obtain a braid presentation of γ_b by an isotopy for F as in Figure 11.

When $m = n = 1$ and $p > q > 0$, γ_b has a braid presentation as in Figure 12. Then by Lemma 3.5, γ_b is a non-trivial knot.

When $m = 1, n = -1$ and $p > q > 0$, similarly, γ_b has a braid presentation as in Figure 13, and γ_b is a non-trivial knot by Lemma 3.5.

When $m = n = -1$ and $p > q > 0$, by simplifying a braid presentation as in Figure 14, we obtain that γ_b is a trivial knot for only $(p, q) = (2, 1)$.

When $m = 1, n = -1$ and $p > q > 0$, we simplify a braid presentation as in Figure 15. For $p < 2q$, i.e. in the middle of Figure 15, the mirror image of the braid presentation follows the original of Figure 15. Hence we obtain that γ_b is a trivial knot for only $(p, q) = (F_{i+1}, F_i)$, where i is a positive integer and F_i is the i -th Fibonacci number.

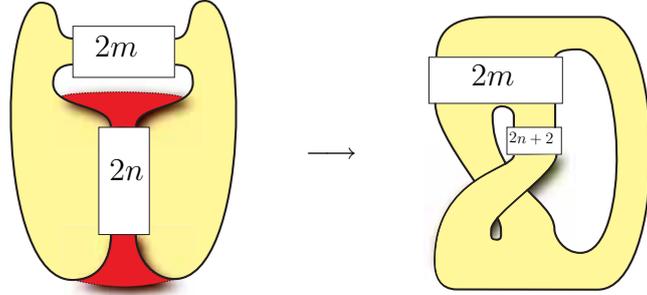


FIGURE 11. Isotopy for F

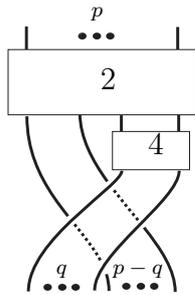


FIGURE 12. $m = n = 1$

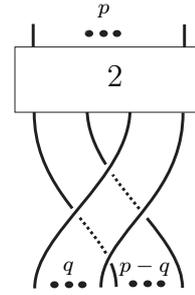


FIGURE 13. $m = 1, n = -1$

By reconsidering the symmetries of γ_b 's, we obtain the following for $m = n = 1$ and for $m = 1, n = -1$.

- When $m = n = 1$, i.e. L is the trefoil knot; for only $(p, q) = \pm(0, 1), \pm(1, 0), \pm(1, 1), \pm(1, -1), \pm(2, -1)$, and $\pm(1, -2)$, γ_b is a trivial knot. Now L is a fibered knot and F is a fibered surface. By regarding (p, q) as an element of $H_1(F)$, using homomorphism of $H_1(F)$ induced by the monodromy, $\pm(1, 0), \pm(0, 1)$, and $\pm(1, -1)$ move to each other, and $\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, -1)$ move to each other. Then there exist two solutions as Remark 2.2.
- When $m = 1, n = -1$, i.e. L is the figure eight knot; for only $(p, q) = \pm(F_i, F_{i+1})$ and $\pm(F_{i+1}, -F_i)$, γ_b is a trivial knot, where i is a non-negative integer and F_i is a i -th Fibonacci number. Now L is a fibered knot and F is a fibered surface. By regarding (p, q) as an element of $H_1(F)$, using homomorphism of $H_1(F)$ induced by the monodromy, all of $\pm(F_i, F_{i+1})$ and $\pm(F_{i+1}, -F_i)$ move to each other. Then there exists only one solution as Remark 2.2.

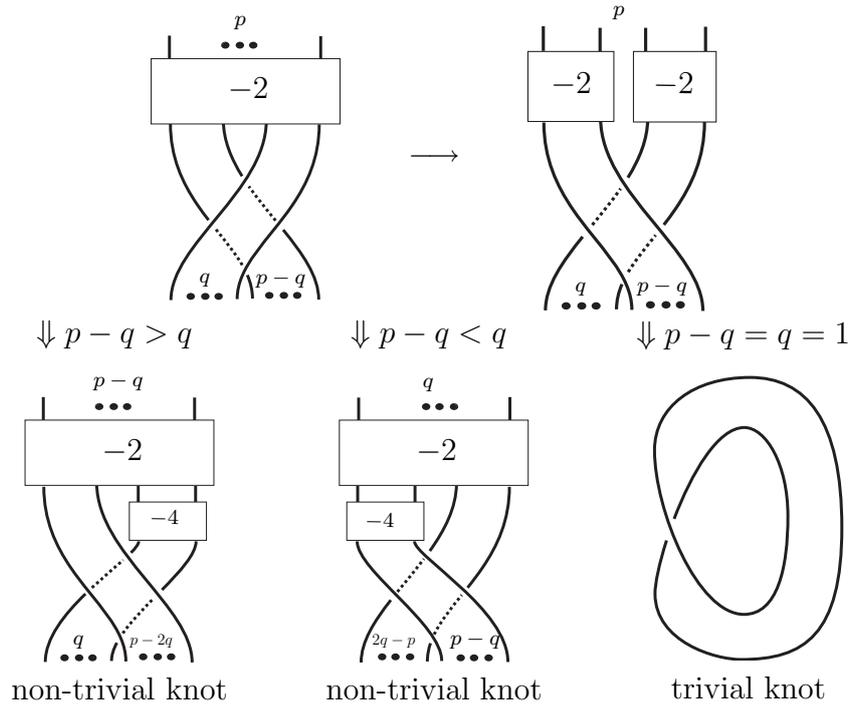


FIGURE 14. $m = n = -1, p > q > 0$

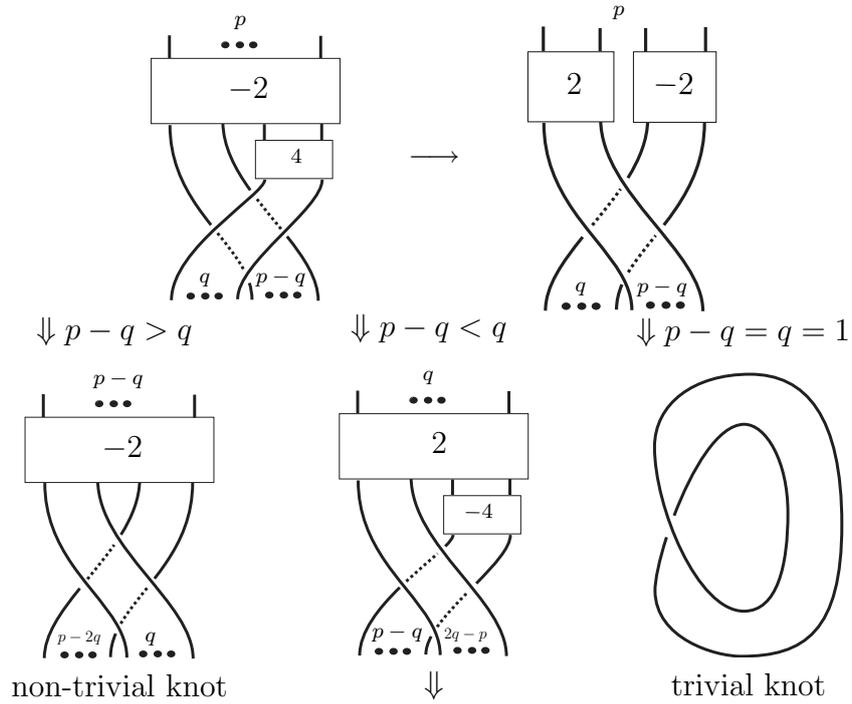


FIGURE 15. $m = -1, n = 1, p > q > 0$

4. DEHN SURGERY ON KNOTS IN LENS SPACES

In this section we prove Theorem 1.3. For the proof we prepare the followings

Theorem 4.1 (Culler-Gordon-Luecke-Shalen [CGLS]). *Suppose that a lens space can be obtained from a non-trivial surgery on a knot K in a lens space. If the distance of the surgery slope and the meridian of K is not 1, then the exterior $E(K)$ is a Seifert fibered space.*

Lemma 4.2. *If K is a knot in $L(4mn - 1, 2m)$ whose exterior is a Seifert fibered space, then K is a core knot or a torus knot.*

Proof of Lemma 4.2. If $E(K)$ is a Seifert fibered space, then a meridian of K is isotopic to a fiber (case 2) or not (case 1).

Case 1 When a meridian is not isotopic to a fiber:

We can extend a Seifert fibered structure of $E(K)$ into one for the lens space $L(4mn - 1, 2m)$. Since a lens space does not contain any essential torus, $E(K)$ has a Seifert fibered structure over a disk with at most two exceptional fibers or over a Möbius band with one exceptional fiber. Only lens spaces $L(4N, 2N - 1)$ ($N \in \mathbb{Z}$) have Seifert fibered structures over \mathbf{RP}^2 with at least one exceptional fiber [J, p.92]. Since K is a knot in $L(4mn - 1, 2m)$, $E(K)$ does not have a Seifert fibered structure over a Möbius band with one exceptional fiber.

- (1-1) If $E(K)$ has a Seifert fibered structure over a disk with at most one exceptional fiber, $E(K)$ is a solid torus. Then K is a core knot.
- (1-2) If $E(K)$ has a Seifert fibered structure over a disk with two exceptional fibers, there exist a vertical annulus which separates $E(K)$ into two solid tori. Then K is a torus knot.
- (1-3) If $E(K)$ has a Seifert fibered structure over a Möbius band with no exceptional fiber, $E(K)$ also has a Seifert fibered structure over a disk with two exceptional fibers. Then K is a torus knot.

Case 2 When a meridian is isotopic to a fiber:

- (2-1) If $E(K)$ has a Seifert fibered structure over a disk with at most one exceptional fiber, since $E(K)$ is a solid torus, K is a core knot.
- (2-2) If $E(K)$ has a Seifert fibered structure which is different from (2-1), we obtain an essential sphere in the lens space from a vertical annulus by attaching two meridian disks. Only $L(4N, 2N - 1)$ is a lens space which has an essential sphere. It contradicts that K is a knot in $L(4mn - 1, 2m)$.

□

Proof of Theorem 1.3. Let K be a strongly invertible knot of type (A) in $L(4mn - 1, 2m)$. Let γ be the isotopy class of an essential loop on $\partial E(K)$ and $K(\gamma)$ denote the 3-manifold obtained by a Dehn surgery on K with slope γ .

Suppose $K(\gamma)$ is $L(2k, 1)$. Let μ be the meridian of K . If $\Delta(\gamma, \mu) \geq 2$, by Theorem 4.1 $E(K)$ is a Seifert fibered space. Here $\Delta(\gamma, \mu)$ denote the geometric intersection number of γ and μ . Then by Lemma 4.2 K is a core knot or a torus knot.

Suppose $\Delta(\gamma, \mu) = 1$. We consider the quotient space of the involution. The quotient space of the 1-dimensional fixed point set in $L(4mn - 1, 2m)$ of the involution is the 2-bridge knot $N(\frac{4mn-1}{2m})$ in the orbit space S^3 . The the quotient space of the torus $\partial E(K)$ is a 2-sphere in S^3 , and it gives a 2-string tangle decomposition of $N(\frac{4mn-1}{2m})$ into two tangles U and P . Here U corresponds to the exterior $E(K)$ of K in $L(4mn - 1, 2m)$ and P to the regular neighborhood of K . Note that P is a rational tangle. Then a Dehn surgery on K gives a rational tangle surgery for $N(\frac{4mn-1}{2m})$. In our case, the Dehn surgery gives the following equation of rational tangle surgery.

$$\begin{cases} N(U + P) = N(\frac{4mn-1}{2m}) \\ N(U + Q) = N(\frac{2k}{1}) \end{cases}$$

By giving a suitable coordinate of the tangle P , we can assume that $P = (\frac{0}{1})$. Then since $\Delta(\gamma, \mu) = 1$, we can assume that $Q = (\frac{1}{w})$ for some integer w . Then by Theorem 4, one of the conclusion (1)-(4) holds. If (1) or (2) holds, $E(K)$ is a solid torus. This means K is a core knot. If (3) or (4) holds, $E(K)$ admits a Seifert fibered structure over a disk with at most 2 exceptional fibers. By Lemma 4.2, K is a core knot or a torus knot. \square

REFERENCES

- [BSC] J. Bath, D. Sherratt, and S. Colloms, Topology of Xer recombination on catenanes produced by Lambda Integrase, *J. Mol. Biol.* **289** (1999) 873-883.
- [CGLS] M. Culler, C. Gordon, J. Luecke, and P. Shalen, Dehn surgery on knots, *Ann. of Math. (2)* **125** (1987), no. 2, 237-300.
- [D1] I. Darcy, Solving unoriented tangle equations involving 4-plats, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), no. 8, 993-1005.
- [D2] I. Darcy, Biological distances on DNA knots and links: applications to XER recombination, *Knots in Hellas '98, Vol. 2 (Delphi)*. *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), no. 2, 269-294.
- [ES] C. Ernst, D.W. Sumners, A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **108** (1990), no. 3, 489-515.
- [HT] A. Hatcher and W. Thurston, Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements, *Invent. Math.* **79** (1985), no. 2, 225-246.
- [HS] M. Hirasawa and K. Shimokawa, Dehn surgeries on strongly invertible knots which yield lens spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 3445-3451.
- [HR] C. Hodgson and J.H. Rubinstein, *Involutions and isotopies of lens spaces*, *Lecture Notes in Math.* vol 1144, Springer-Verlag, 1983.
- [J] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 43. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [K] T. Kobayashi, Uniqueness of minimal genus Seifert surfaces for links, *Topology Appl.* **33** (1989), 265-279.
- [Mo] K. Motegi, Knot types of satellite knots and twisted knots, *Lectures at KNOTS '96 (Tokyo)*, 73-93, Ser. *Knots Everything*, 15, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
- [Mu1] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.
- [Mu2] K. Murasugi, On a certain numerical invariant of link types, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117** 1965 387-422.
- [Su] D.W. Sumners, Lifting the curtain: using topology to probe the hidden action of enzymes, *Notices Amer. Math. Soc.* **42** (1995), no. 5, 528-537.

- [WZ] S. Wang and Q. Zhou, Symmetry of knots and cyclic surgery, *Trans. Amer. Math. Soc.* **330** (1992), 665-676.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SAITAMA UNIVERSITY, SAITAMA, 338-8570, JAPAN

E-mail address: kisihara@rimath.saitama-u.ac.jp

E-mail address: kshimoka@rimath.saitama-u.ac.jp

Twisted Alexander Invariant and its Applications

Takahiro KITAYAMA

15 Feb 2008

Twisted Alexander invariants were introduced for knots in the 3-sphere by Lin [12] and generally for finitely presentable groups by Wada [14].

Notation.

$K \subset S^3$: a tame knot,

$E_K := S^3 \setminus N(K)$; $N(K)$: an open tubular neighborhood of K ,

$G_K := \pi_1 E_K$,

R : a Noetherian UFD ; $Q(R)$: the quotient field of R .

Fix a meridional element $\mu \in G_K$ and denote by $\alpha : G_K \rightarrow \langle t \rangle$ the abelianization homomorphism which maps μ to the generator t .

1 Definitions and computations

Definition 1.1.

For a representation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$, we define the i -th twisted Alexander polynomial $\Delta_{K,\rho}^i$ and the twisted Alexander invariant $\Delta_{K,\rho}$ associated to ρ by

$$\begin{aligned}\Delta_{K,\rho}^i &= \text{order } H_i(E_K; R[t, t^{-1}]_{\alpha \otimes \rho}^{\oplus n}), \\ \Delta_{K,\rho} &= \Delta_{K,\rho}^1 / \Delta_{K,\rho}^0 \in Q(R)(t) / \langle \eta t^l \rangle_{\eta \in R^\times, l \in \mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

Extending $\alpha \otimes \rho$ linearly, we have a ring homomorphism $\Phi : \mathbb{Z}[G_K] \rightarrow M_n(R[t, t^{-1}])$.

Proposition 1.2 ([6], [7]).

Let $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$ be a representation. Given a presentation $G_K = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_{m-1} \rangle$, for any index $1 \leq k \leq m$ which satisfies $\alpha(x_k) \neq 1$, we have

$$\Delta_{K,\rho} = \frac{\det \left(\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right)_{j \neq k}}{\det \Phi(x_k - 1)} \quad \text{mod } \langle \eta t^l \rangle_{\eta \in R^\times, l \in \mathbb{Z}}.$$

This is nothing but Wada's construction [14].

2 Properties

In this section, let R be a field F with (possibly trivial) involution $\bar{\cdot}$. A representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$ is called *acyclic* if $H_*(X; F(t)_{\alpha \otimes \rho}^{\oplus n})$ vanishes. For an acyclic representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$, we denote by $T_{K,\rho} \in F(t)^\times / \langle (\pm 1)^n \epsilon t^n \rangle$, where $\epsilon = \det \rho(\mu)$, the *Reidemeister torsion* associated to $\alpha \otimes \rho$.

Theorem 2.1 ([7], [8]).

For an acyclic representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$,

$$\Delta_{K,\rho}(t) = T_{K,\rho}(t) \pmod{\langle \eta t^l \rangle_{\eta \in F^\times, l \in \mathbb{Z}}}.$$

We extend the involution on F to $F(t)$ by $t \mapsto t^{-1}$. For a representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$, we denote by ρ^\dagger the representation defined by $\rho^\dagger(\gamma) := \rho(\gamma^{-1})^*$, where $\gamma \in G_K$.

Theorem 2.2 ([7], [8]).

For a representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$,

$$\Delta_{K,\rho^\dagger}(t) = \overline{\Delta_{K,\rho}(t)}.$$

A twisted version of the Torres condition for links is also known by Morifuji [13].

3 Applications

• Fiberedness and genus

A polynomial $f \in R[t, t^{-1}]$ is called *monic* if the highest and lowest coefficient of f are units.

Theorem 3.1 ([1]).

Let K be a fibered knot. For any representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$, $\Delta_{K,\rho}^1(t)$ is monic.

Theorem 3.2 ([4], [5]).

Let K be a fibered knot. For any representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{SL}_{2n}(F)$, the highest coefficient $c(\Delta_{K,\rho}) \in F^\times$ is well-defined and 1.

Theorem 3.3 ([3]).

For any representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$,

$$\deg \Delta_{K,\rho} \leq n(2g(K) - 1).$$

Moreover, if K is a fibered knot, then the equality holds.

- **Surjective homomorphisms**

Theorem 3.4 ([11]).

Let K and K' be knots. Suppose that there exists a surjective homomorphism $\varphi: G_{K'} \rightarrow G_K$. Then for any representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$, $\Delta_{K',\rho \circ \varphi}^1$ is divisible by $\Delta_{K,\rho}^1$.

- **Other applications**

Kirk and Livingston [7] showed that for certain representations of a cyclic cover of E_K , an associated twisted polynomial must have a factorization of the form $f(t)\overline{f(t)}$ if K is slice and described determinants of Casson-Gordon invariants via the twisted polynomials.

Hilman, Livingston and Naik [6] generalize the criteria that must be satisfied by the Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ of a periodic knot K to the twisted case.

4 Speaker's work

- **Normalization** ([9])

For a representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$, we can combinatorially construct the *normalized twisted Alexander invariant* $\widetilde{\Delta}_{K,\rho} \in Q(R)(\epsilon^{\frac{1}{2}})(t^{\frac{1}{2}})$ associated to ρ which satisfies the following properties.

Theorem 4.1.

(i) For a representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$,

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \widetilde{\Delta}_{K,\rho}(t) \bmod \langle \epsilon^{\frac{1}{2}}, \eta t^{\frac{l}{2}} \rangle_{\eta \in R^\times, l \in \mathbb{Z}}.$$

(ii) If ρ is trivial, then

$$\nabla_K(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \widetilde{\Delta}_{K,\rho}(t),$$

where $\nabla_K(z)$ is the Conway polynomial of K .

(iii) For a representation $\rho: G_K \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$,

$$\widetilde{\Delta}_{K,\rho^\dagger}(t) = (-1)^n \overline{\widetilde{\Delta}_{K,\rho}(t)}.$$

For $f(t) = p(t)/q(t) \in Q(R)(t)$ ($p, q \in R[t, t^{-1}]$), we define

$$\begin{aligned} \deg f &:= \deg p - \deg q, \\ \text{h-deg } f &:= (\text{the highest degree of } p) - (\text{the highest degree of } q), \\ c(f) &:= \frac{(\text{the highest coefficient of } p)}{(\text{the highest coefficient of } q)}. \end{aligned}$$

Theorem 4.2.

Let K be a fibered knot. For any representation $\rho: G_K \rightarrow GL_n(R)$,

$$\begin{aligned} \deg \widetilde{\Delta}_{K,\rho} &= 2 \text{ h-deg } \widetilde{\Delta}_{K,\rho} = n(2g(K) - 1), \\ c(\widetilde{\Delta}_{K,\rho}) &= c(\nabla_K)^n \epsilon^{g(K) - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

• **Symmetry on representation spaces** ([10])

Dubois [2] constructed a canonical volume form τ_K on a 1-dimensional smooth part $\text{Reg}(K)$ in the space of conjugacy classes of irreducible $SU(2)$ -representations of G_K . τ_K induces an orientation and a Riemannian metric on $\text{Reg}(K)$.

Investigation of isometries which come from standard group actions on $\text{Reg}(K)$ enables us to show that the twisted Alexander function on the $SU(2)$ -representation space has certain symmetry about the metrization.

References

- [1] J. C. Cha, *Fibred knots and twisted Alexander invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 4187–4200.
- [2] J. Dubois, *Non abelian Reidemeister torsion and volume form on the $SU(2)$ -representation space of knot groups*, Ann. Inst. Fourier **55** (2005) 1685–1734.
- [3] S. Friedl and T. Kim, *Thurston norm, fibered manifolds and twisted Alexander polynomials*, Topology **45** (2006) 929–953.
- [4] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, Comment. Math. Helv. **80** (2005) 51–61.
- [5] H. Goda and T. Morifuji, *Twisted Alexander polynomial for $SL(2, \mathbb{C})$ -representations and fibered knots*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **25** (2003) 97–101.
- [6] J. Hillman, C. Livingston and S. Naik, *Twisted Alexander polynomials of periodic knots*, Alg. Geom. Topology **6** (2006) 145–169.
- [7] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999) 635–661.

- [8] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996) 431–442.
- [9] T. Kitayama, *Normalization of twisted Alexander invariants*, arXiv:0705.2371
- [10] T. Kitayama, *Symmetry in $SU(2)$ -representation spaces of knot groups and twisted Alexander functions*, arXiv:0801.3819
- [11] T. Kitano, M. Suzuki and M. Wada, *Twisted Alexander polynomial and surjectivity of a group homomorphism*, Alg. Geom. Topology **5** (2005) 1315–1324.
- [12] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engle. Ser.) **17** (2001) 361–380.
- [13] T. Morifuji, *A Torres conditions for twisted Alexander polynomials*, Publ. Ras. Inst. Math. Sci. **43** (2007) 143–153.
- [14] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994) 241–256.

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo,
3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan
E-mail address: kitayama@ms.u-tokyo.ac.jp

3-manifold theory via branched spines

慶應義塾大学

古宇田 悠哉

閉 3 次元多様体の分岐スパインとはその補空間が開球体となっている分岐曲面のことをいいます。すべての閉 3 次元多様体はこのような分岐曲面を含むことが知られています。この曲面は閉 3 次元多様体から一点を除いたものとシンプルホモトピー同値になっており、特殊な「圧縮不可能分岐曲面」ともいえるわけですが、この特殊な分岐曲面は 3 次元多様体自身の位相幾何学的な情報のみならず、その上のスピンの c 構造、スピン構造、接触構造、幾何構造などの情報をのせる上で有効な手段となります。

本公演では、この分岐スパインというものをを用いて 3 次元多様体にかどのように考察されるのかということについて、具体的に

1. 3 次元多様体の基本群、Heegaard 分解、連結和、トーラス分解といった基本的な性質や不変量が分岐スパインを通してどのように「見える」のか
2. 分岐スパインが 3 次元多様体上のスピンの c 構造をどのように拾い、その Reidemeister-Turaev トーションがいかにして計算されるのか

という 2 点にターゲットを絞り、解説していきます。

参考文献

- [1] Benedetti, R., Petronio, C.: Branched Standard Spines of 3-manifolds (Lecture Notes in Math. **1653**). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1997)
- [2] Benedetti, R., Petronio, C.: Reidemeister-Turaev torsion of 3-dimensional Euler structures with simple boundary tangency and pseudo-Legendrian knots. Manuscripta Math. **106**, pp13–pp74 (2001)
- [3] Koda, Y.: Spines, Heegaard splittings and Reidemeister-Turaev torsion of Euler structure. Tokyo J. Math. **30**, pp417 - 439, (2007)
- [4] Koda, Y.: Branched spines and Heegaard genus of 3-manifolds. Manuscripta Math. **123**, 285-299 (2007)
- [5] Koda, Y.: A Heegaard-type presentation of branched spines and the Reidemeister-Turaev torsion. to appear in Math. Z.